

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

微积分 (III) -2

主讲: 申力立
scu@mickeylili.com

四川大学数学学院

2012年2月22日

目录

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

1 定积分的基本性质

2 原函数存在定理

定积分的线性性

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

命题 (定积分的线性性)

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a, b]$ 上可积, 则对任意常数 k_1 和 k_2 , 函数 $k_1 f(x) + k_2 g(x)$ 也在 $[a, b]$ 上可积, 且有

$$\int_a^b [k_1 f(x) + k_2 g(x)] dx = k_1 \int_a^b f(x) dx + k_2 \int_a^b g(x) dx.$$

特别地, 在上面的定理中令 $k_1 = k_2 = 1$, 就得到

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

令 $k_2 = 0$, 就得到 $\forall k \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

定积分的线性性

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

命题 (定积分的线性性)

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a, b]$ 上可积, 则对任意常数 k_1 和 k_2 , 函数 $k_1 f(x) + k_2 g(x)$ 也在 $[a, b]$ 上可积, 且有

$$\int_a^b [k_1 f(x) + k_2 g(x)] dx = k_1 \int_a^b f(x) dx + k_2 \int_a^b g(x) dx.$$

特别地, 在上面的定理中令 $k_1 = k_2 = 1$, 就得到

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

令 $k_2 = 0$, 就得到 $\forall k \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

定积分的线性性

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

证明.

对 $[a, b]$ 的任意一个划分

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

和任意 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 成立等式

$$\sum_{i=1}^n [k_1 f(\xi_i) + k_2 g(\xi_i)] \Delta x_i = k_1 \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i + k_2 \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i.$$

定积分的线性性

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

两边令 $\Delta x = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \rightarrow 0$, 由 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的可积性有

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [k_1 f(\xi_i) + k_2 g(\xi_i)] \Delta x_i \\ &= k_1 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i + k_2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i \\ &= k_1 \int_a^b f(x) dx + k_2 \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

由定积分的定义即知 $k_1 f(x) + k_2 g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 且

$$\int_a^b [k_1 f(x) + k_2 g(x)] dx = k_1 \int_a^b f(x) dx + k_2 \int_a^b g(x) dx.$$



定积分的线性性

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

推论

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 而 $g(x)$ 只在有限个点上与 $f(x)$ 的取值不同, 则 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上也可积, 并且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

这个推论说明, 在有限个点上改变一个可积函数的函数值, 并不影响它的可积性和积分值.

定积分的线性性

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

推论

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 而 $g(x)$ 只在有限个点上与 $f(x)$ 的取值不同, 则 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上也可积, 并且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

这个推论说明, 在有限个点上改变一个可积函数的函数值, 并不影响它的可积性和积分值.

定积分的线性性

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

证明.

令 $h(x) = g(x) - f(x)$, 则 $h(x)$ 只在有限个点上不为 0, 从而只有有限个间断点, 因此在 $[a, b]$ 上可积. 对 $[a, b]$ 的任意一个划分

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 中一定有使得 $h(x) = 0$ 的点. 于是, 当 ξ_i 全部取这样的点时,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n h(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 0 \cdot \Delta x_i = 0,$$

$$\text{故 } \int_a^b h(x) dx = 0.$$

定积分的线性性

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

由定积分的线性性即得

$$\begin{aligned}\int_a^b g(x)dx &= \int_a^b [f(x) + h(x)]dx \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b h(x)dx \\ &= \int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$



定积分的区间可加性

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

命题 (定积分的区间可加性)

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则对任意点 $c \in [a, b]$, $f(x)$ 在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上都可积.

反之, 若 $f(x)$ 在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上都可积, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 且成立

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

定积分的区间可加性

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

证明.

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, c 是 $[a, b]$ 中任意给定的一点.
由 Riemann 可积的充分必要条件, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $[a, b]$ 的一个划分

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

使得相应的振幅满足

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \epsilon.$$

我们总可以假设 c 是其中的某一个分点 x_k , 否则只需要在原有划分中插入分点 c 作成新的划分, 上面的不等式仍然成立.

定积分的区间可加性

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

将

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k = c$$

和

$$c = x_k < x_{k+1} < x_{k+2} < \cdots < x_n = b$$

分别看成是对 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 作的划分, 则显然有

$$\sum_{i=1}^k \omega_i \Delta x_i < \epsilon \quad \text{和} \quad \sum_{i=k+1}^n \omega_i \Delta x_i < \epsilon.$$

又由 Riemann 可积的充分必要条件即知 $f(x)$ 在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上都是可积的.

定积分的区间可加性

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

反之, 设 $f(x)$ 在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上都可积. 对任意 $\epsilon > 0$, 分别存在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 的划分

$$a = x'_0 < x'_1 < x'_2 < \cdots < x'_{n_1} = c$$

和

$$c = x''_0 < x''_1 < x''_2 < \cdots < x''_{n_2} = b$$

使得相应的振幅满足

$$\sum_{i=1}^{n_1} \omega'_i \Delta x'_i < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{和} \quad \sum_{i=1}^{n_2} \omega''_i \Delta x''_i < \frac{\epsilon}{2}.$$

定积分的区间可加性

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

将这两组分点合并起来作为 $[a, b]$ 的一组分点 $\{x_i\}_{n=0}^n$, 这里 $n = n_1 + n_2$, 则

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n_1} \omega'_i \Delta x'_i + \sum_{i=1}^{n_2} \omega''_i \Delta x''_i < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

因此 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

定积分的区间可加性

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

在 $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^c f(x)dx$, $\int_c^b f(x)dx$ 都存在的条件下, 只需注意到对任意包含点 c 的划分

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = c < x_{k+1} < \cdots < x_n = b$$

都成立

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^k f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{i=k+1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

在上式两边令 $\Delta x = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \rightarrow 0$ 就得到

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

定积分的区间可加性

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

我们规定

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx,$$

因此容易证明, 当 c 是 $[a, b]$ 之外的一点时, 只要 $f(x)$ 的可积性依然保持, 定积分的区间可加性就依然成立.

例如, 当 $c < a < b$ 时, 由

$$\int_c^b f(x)dx = \int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx = - \int_a^c f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$$

即得

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

定积分的保序性

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

命题 (定积分的保序性)

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a, b]$ 上可积, 且在 $[a, b]$ 上恒有 $f(x) \leq g(x)$, 则成立

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

定积分的保序性

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

证明.

只需证明对 $[a, b]$ 上的非负函数 $f(x)$ 成立 $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

由于在 $[a, b]$ 上恒有 $f(x) \geq 0$, 对 $[a, b]$ 的任意划分 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 和任意点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 都有

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0.$$

令 $\Delta x = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \rightarrow 0$ 就得到

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0.$$



积分第一中值定理

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

定理 (积分第一中值定理)

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a, b]$ 上可积, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上不变号, 则存在 $\eta \in [m, M]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \eta \int_a^b g(x)dx,$$

这里 M 和 m 分别表示 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的上确界和下确界. 特别地, 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

积分第一中值定理

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

证明.

由于 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上不变号, 不妨设

$$g(x) \geq 0, x \in [a, b],$$

则

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

由定积分的保序性得到

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx.$$

积分第一中值定理

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

由于 $\int_a^b g(x)dx$ 和 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 都是常数, 因此必有某个 $\eta \in [m, M]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \eta \int_a^b g(x)dx.$$

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则由闭区间上连续函数的介值定理可知存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = \eta$, 因此

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$



积分第一中值定理

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

推论

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a).$$

证明.

在积分第一中值定理中令 $g(x) \equiv 1$ 后立得. □

积分第一中值定理

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

在积分第一中值定理的证明的前半部分中令 $g(x) \equiv 1$ 后还可以得到如下推论:

推论

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, M 和 m 分别为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的上确界和下确界, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

积分第一中值定理

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

上述两个推论给出了曲线 $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形的面积的估计范围, 其几何意义是很显然的.

目录

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

1 定积分的基本性质

2 原函数存在定理

原函数存在定理

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积, 由定积分的区间可加性, 对任意 $x \in [a, b]$, 积分 $\int_a^x f(t)dt$ 存在, 这是一个定义在 $[a, b]$ 上的关于 x 的函数.

定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 作函数

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in [a, b],$$

则

- (1) $F(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数;
- (2) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, 且

$$F'(x) = f(x).$$

原函数存在定理

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

证明.

(1) 由定积分的区间可加性,

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

记 m 和 M 分别为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的下确界和上确界, 由积分第一中值定理, 存在 $\eta \in [m, M]$ 使

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \eta \cdot \Delta x,$$

因此

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [F(x + \Delta x) - F(x)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \eta \cdot \Delta x = 0,$$

故 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

原函数存在定理

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 由积分第一中值定理, 存在 $\xi \in [x, x + \Delta x]$ 使

$$F(x + \Delta x) - F(x) = f(\xi) \cdot \Delta x,$$

于是

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\xi) \cdot \Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) \\ &= f(x). \end{aligned}$$



原函数存在定理

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

这个定理中的 (2) 实际上指出了这个事实:

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in [a, b]$$

是函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数.

或者换句话说: 任何一个连续函数必存在原函数.

因此我们把 (2) 称作原函数存在定理.

原函数存在定理

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

同时, 这个定理扩展了函数的形式. $\int_a^x f(t)dt$ 这种表示方式与我们熟悉的初等函数形式迥异, 但确实是一种函数的表示形式.

另外, 我们也得到了对 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 这种形式的函数求导的公式:

$$F'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = \frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t)dt \right) = f(x).$$

我们通常称其为“对积分上限求导”.

对积分上限求导的例子

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

例

$$\text{求 } \frac{d}{dx} \left(\int_0^x e^{2t} dt \right).$$

解.

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^x e^{2t} dt \right) = e^{2x}.$$



对积分上限求导的例子

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

例

$$\text{求 } \frac{d}{dx} \left(\int_x^{-1} \cos^2 t dt \right).$$

解.

$$\frac{d}{dx} \left(\int_x^{-1} \cos^2 t dt \right) = -\frac{d}{dx} \left(\int_{-1}^x \cos^2 t dt \right) = -\cos^2 x.$$



对积分上限求导的例子

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

例

计算 $F(x) = \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt$ 的导数.

解.

记 $u = x^2$, 则 $F(x) = G(u) = \int_0^u \sin \sqrt{t} dt$. 由复合函数求导法则,

$$\begin{aligned} F'(x) &= G'(u) \cdot u'(x) \\ &= \frac{d}{du} \left(\int_0^u \sin \sqrt{t} dt \right) \cdot 2x \\ &= \sin \sqrt{u} \cdot 2x \\ &= 2x \sin x. \end{aligned}$$

对积分上限求导的例子

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

熟练之后, 该题的解答过程可以简写如下:

解.

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} \right) = \sin \sqrt{x^2} \cdot (x^2)' = 2x \sin x.$$



对积分上限求导的例子

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

例

$$\text{求 } \frac{d}{dx} \left(\int_x^{x^2} \sin t dt \right).$$

解.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\int_x^{x^2} \sin t dt \right) &= \frac{d}{dx} \left(\int_x^0 \sin t dt + \int_0^{x^2} \sin t dt \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(\int_0^{x^2} \sin t dt - \int_0^x \sin t dt \right) \\ &= \sin x^2 \cdot (x^2)' - \sin x \\ &= 2x \sin x^2 - \sin x. \end{aligned}$$



对积分上限求导的例子

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

熟练之后, 该题的解答过程可以简写如下:

解.

$$\frac{d}{dx} \left(\int_x^{x^2} \sin t dt \right) = \sin x^2 \cdot (x^2)' - \sin x = 2x \sin x^2 - \sin x.$$



对积分上限求导的例子

微积分
(III) -2

申力立

定积分的基本
性质

原函数存在定
理

例

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} e^t dt}{x}.$$

解.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} e^t dt}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^{\sin x} e^t dt \right)'}{x'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x} (\sin x)' \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x} \cos x \\ &= 1. \end{aligned}$$