四川大学微积分习题册评讲

微积分 (II)-1 (第一章 — 第四章)

申力立

scu@mickeylili.com

目录

1 函数的极限

一. 用定义证明极限:

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-3}{5n+1}=\dfrac{2}{5}$.

证明. $\forall\epsilon>0$, 取 $N=\left[\dfrac{4}{5\epsilon}\right]$, 则 $\forall n>N$,

$$\left|\frac{2n-3}{5n+1}-\frac{2}{5}\right|=\frac{17}{5(5n+1)}<\frac{4}{5n}<\epsilon.$$

□

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}=0$.

证明. $\forall\epsilon>0$, 取 $X=\dfrac{1}{\epsilon^2}$, 则 $\forall x>X$,

$$\left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}-0\right|=\left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right|\le\frac{1}{\sqrt{x}}<\epsilon.$$

□

二. 设 $\{x_n\}$ 为一数列.

2. 举反例说明若 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$, 不一定有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

提示. 令 $x_n=(-1)^n$. □

三. 判断题:

1. 若 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都收敛, 则 $\{x_n+y_n\}$ 必收敛.

提示. 若 $x_n\to a$, $y_n\to b$, 由定义易证 $x_n+y_n\to a+b$. □

2. 若 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都发散, 则 $\{x_n+y_n\}$ 必发散.

提示. 令 $x_n=(-1)^n$, $y_n=(-1)^{n-1}$. □

3. 若 $\{x_n\}$ 收敛, $\{y_n\}$ 发散, 则 $\{x_n+y_n\}$ 必发散.

提示. 假设 $\{x_n+y_n\}$ 收敛, 则由 1 知 $y_n=(x_n+y_n)-x_n$ 收敛. □

四. 证明: 对数列 $\{x_n\}$, 如果 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

证明. $\forall \epsilon > 0$, 由 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = a$,

$$\exists K_1 \in \mathbb{N}^+, \forall k > K_1, |x_{2k-1} - a| < \epsilon.$$

由 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = a$,

$$\exists K_2 \in \mathbb{N}^+, \forall k > K_2, |x_{2k} - a| < \epsilon.$$

取 $K = \max\{K_1, K_2\}$, 令 $N = 2K$, 则

$$\forall n > N, |x_n - a| < \epsilon.$$

□

五. 证明: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 当且仅当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

提示. 仿照讲义中对 $x \to x_0$ 的情况的证明. □

六. 根据函数的图形写出下列极限:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x$.

提示. $\arctan x$ 的值域是 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. □

七. 证明: 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 则 f 在 x_0 的某个去心邻域内有界.

证明. 见讲义. □

八. 证明: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 当且仅当 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$.

证明. 见讲义. □

2 无穷小与无穷大

一. 填空题:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-1}=0, \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty,$
$\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0,\ \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=\infty,$
$\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0,\ \lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty.$

二. 选择题:

当 $x\to 0$ 时, $\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ 是无界的, 但不是无穷大.

提示. 跟下一道题同理. □

三. 证明: 函数 $f(x)=x\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界, 但当 $x\to+\infty$ 时, $f(x)$ 不是无穷大.

证明. $\forall M>0$, 不妨设 $M\in\mathbb{N}^+$, 则

$$\left|f\left(\left(M+\frac{1}{2}\right)\pi\right)\right|=\left|\left(M+\frac{1}{2}\right)\pi\sin\left(M+\frac{1}{2}\right)\pi\right|=\left(M+\frac{1}{2}\right)\pi>M,$$

因此 $f(x)=x\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界.

但给定 $M_0=1$, 则 $\forall X>0$, 取正整数 $n>X$, 就有 $n\pi>X$, 且

$$|f(n\pi)|=|n\pi\sin n\pi|=0<M_0,$$

故 $f(x)$ 不是当 $x\to+\infty$ 时的无穷大. □

四. 判断题:

2. 两个无穷大的和也是无穷大.

提示. 当 $x\to\infty$ 时考虑 $f(x)=x, g(x)=-x$. □

3. 无穷小与无穷大的和一定是无穷大.

证明. 设 α 是无穷小, f 是无穷大. $\forall M>0$,

$$\exists\delta_1>0,\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta_1),|f(x)|>2M,$$

$$\exists\delta_2>0,\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta_2),|\alpha(x)|<\frac{M}{2},$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则

$$\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta),|f(x)+\alpha(x)|\geq|f(x)|-|\alpha(x)|>2M-\frac{M}{2}=\frac{3M}{2}>M.$$

□

4. 无穷小与无穷大的积一定是无穷大.

提示. 当 $x\to\infty$ 时考虑 $f(x)=\dfrac{1}{x},g(x)=x$. □

5. 无穷小与无穷大的积一定是无穷小.

提示. 反例同上. □

6. 无穷大与无穷大的积也是无穷大.

提示. 设 $f(x),g(x)$ 为无穷大, 由书上第四节定理 2 知 $\dfrac{1}{f(x)},\dfrac{1}{g(x)}$ 为无穷小, 又由第五节定理 2 的推论 2 知 $\dfrac{1}{f(x)g(x)}$ 为无穷小, 最后再由第四节定理 2 知 $f(x)g(x)$ 为无穷大. □

五. 举例说明:

1. 两个无穷小的商不一定是无穷小.

提示. 当 $x\to 0$ 时考虑 $f(x)=g(x)=x$. □

2. 无限个无穷小的和不一定是无穷小.

解. $\forall n \in \mathbb{N}^+$, 考虑定义域为 $[1, +\infty)$ 的函数 $f_n(x)$ 如下:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in [n, n+1), \\ 0, & x \notin [n, n+1). \end{cases}$$

显然 $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$, 即 $f_n(x)$ 为 $x \to +\infty$ 时的无穷小.

然而, 考虑

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

则 $\forall x \in [1, +\infty)$, 不妨设 $x \in [k, k+1), k \in \mathbb{N}^+$, 我们有

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k. \end{cases}$$

于是

$$F(x) = f_k(x) + \sum_{n=1}^{k-1} f_n(x) + \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x) = f_k(x) = 1.$$

因此 $F(x) \equiv 1$, 它不是当 $x \to +\infty$ 时的无穷小. □

六. 证明:

1. 当 $x \to 0$ 时, $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ 为无穷小.

证明. $\forall \epsilon > 0$, 取 $\delta = \epsilon$, 则

$$\forall x \in \mathring{U}(0, \delta), |f(x)| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| < \delta = \epsilon.$$

□

2. 当 $x \to 0^+$ 时, $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ 为无穷大.

证明. $\forall M > 0$, 不妨设 $M > 1$, 取 $\delta = \dfrac{1}{\ln M}$, 则

$$\forall x \in (0, \delta), |f(x)| = e^{\frac{1}{x}} > e^{\ln M} = M.$$

□

3. 当 $x \to -\infty$ 时, $f(x) = e^x$ 为无穷小.

证明. $\forall \epsilon > 0$, 不妨设 $0 < \epsilon < 1$, 取 $X = \ln \epsilon$, 则 $X < 0$, 且

$$\forall x < X, |f(x)| = e^x < e^X = e^{\ln \epsilon} = \epsilon.$$

$\square$

3 极限运算法则

一. 计算下列极限:

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$, $(n\in\mathbb{N}^+)$.

解.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1}(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)\\ &= n.\end{aligned}$$

□

6. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$.

解.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-x^3}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)\\ &= 3x^2.\end{aligned}$$

□

二. 计算下列极限:

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

解.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+(n-1)}{n^2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$, $(|a|<1, |b|<1)$.

解.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}}=\frac{1-b}{1-a}.$$

□

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$.

解.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1}{2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+3}=\frac{1}{3}.$$

□

三. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$, 求 a,b 的值.

解. 由

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}=0$$

可知

$$\begin{cases}1-a=0,\\ -(a+b)=0.\end{cases}$$

因此 $a=1, b=-1$. □

四. 若 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{1-x^2}-\dfrac{x}{1-x}\right)=\dfrac{3}{2}$, 求 a 的值.

解. 由

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{a}{1-x^2}-\frac{x}{1-x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{a-x-x^2}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{a-x-x^2}{(1-x)(1+x)}=\frac{3}{2}$$

可知 $a-x-x^2$ 含有因子 $1-x$.

设

$$a-x-x^2=(1-x)(b+x), \tag{1}$$

则

$$\lim_{x\to 1}\frac{a-x-x^2}{(1-x)(1+x)}=\lim_{x\to 1}\frac{b+x}{1+x}=\frac{b+1}{2}=\frac{3}{2},$$

故 $b=2$. 代入 (1) 式得

$$a-x-x^2=(1-x)(2+x)=2-x-x^2,$$

因此 $a=2$. □

五. 计算下列极限:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x-2}$.

提示. 与书上第五节例 4 做法相同. □

2. $\lim\limits_{x\to\infty}(5x^2-4x-3)$.

提示. 参考书上第五节例 8 上面的总结. □

六. 计算下列极限:

提示. 应用书上第五节定理 2: 有界函数与无穷小的乘积是无穷小. □

七.

设 $f(x)=\begin{cases}x, & |x|\le 1\\ x^2-5, & |x|>1,\end{cases}$, 分别求函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 与 $x=1$ 的左极限、右极限和极限.

提示. 直接代入计算得左极限和右极限, 如果两者不相等则极限不存在. □

八. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$, 求 $f(x)$ 的表达式.

解. 若 $|x|=1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-1}{1+1}=0$;

若 $|x|<1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}=\dfrac{0-1}{0+1}=-1$;

若 $|x|>1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x^{2n}}}{1+\dfrac{1}{x^{2n}}}=1$.

因此

$$f(x)=\begin{cases}-1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$$

□

4 极限存在准则, 两个重要极限

一. 利用夹逼定理求下列极限:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n}\right)$.

解. 由于

$$0<\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}\right)<\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$,

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n}\right)=0$. □

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{1}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n+n}\right)$.

解. 由于

$$0<\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{1}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n+n}\right)<\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$,

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{1}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n+n}\right)=0$. □

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}(\arctan x)^2$.

解. 由于

$$-\frac{4}{|x|}<-\frac{1}{|x|}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2<\frac{1}{x}(\arctan x)^2<\frac{1}{|x|}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2<\frac{4}{|x|},$$

而 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{4}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{|x|}=0$,

因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}(\arctan x)^2=0$. □

二. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}=3$.

证明. 由于

$$3=\sqrt[n]{3^n}<\sqrt[n]{2^n+3^n}<\sqrt[n]{3^n+3^n}=\sqrt[n]{2\cdot 3^n}=3\cdot 2^{\frac{1}{n}},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=2^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=1$,
因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}=3$. □

三. $a=\max\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}(a_k>0,k=1,2,\ldots,m)$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=a$.

证明. 由于

$$a=\sqrt[n]{a^n}<\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\leq\sqrt[n]{m\cdot a^n}=a\cdot m^{\frac{1}{n}},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}m^{\frac{1}{n}}=m^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=1$,
因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=a$. □

四. 设 $a>1$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$.

证明. 设 $b=a-1$, 则 $b>0$. 由于当 $n\geq 2$ 时,

$$0<\frac{n}{a^n}=\frac{n}{(1+b)^n}=\frac{n}{\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k b^k}<\frac{n}{C_n^2 b^2}=\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}b^2}=\frac{2}{(n-1)b^2}.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{(n-1)b^2}=0$,
因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$. □

注记.

$$\forall a>1,\forall k\in\mathbb{N}^+,\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a^k n}{n}=0.$$

□

五. 利用数列的单调有界准则证明下列数列收敛, 并求出极限:

1. $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \ldots, x_n = \sqrt{2+x_{n-1}}, \ldots$

证明. 首先用数学归纳法证明

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, 1 < x_n < 2.$$

显然 $1 < x_1 < 2$. 假设 $1 < x_n < 2$, 则 $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} < \sqrt{2+2} = 2$ 且 $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} > \sqrt{2+1} > 1$, 故得证.
$\forall n \in \mathbb{N}^+$, 由 $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$ 得到 $x_{n+1}^2 - 1 = x_n + 1$, 从而

$$\frac{x_n+1}{x_{n+1}+1} = x_{n+1} - 1 < 2 - 1 = 1,$$

故 $x_n + 1 < x_{n+1} + 1$, 因此 $x_n < x_{n+1}$, 即数列 $\{x_n\}$ 单调增加.
这样数列 $\{x_n\}$ 单调有界, 从而收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+x_{n-1}} = \sqrt{2+\lim_{n\to\infty} x_{n-1}} = \sqrt{2+a},$$

化简得

$$a^2 - a - 2 = (a-2)(a+1) = 0,$$

该方程的根为 $a = 2$ 或 -1. 注意到 $a = \sqrt{2+a} > 0$, 舍去负值, 就得到

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a = 2.$$

□

2. $x_1 = 1, x_2 = 1 + \dfrac{x_1}{1+x_1}, \ldots, x_n = 1 + \dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}, \ldots$

证明. 首先用数学归纳法证明

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, 0 < x_n < 2.$$

显然 $0 < x_1 < 2$. 假设 $0 < x_n < 2$, 则 $x_{n+1} = 1 + \dfrac{x_n}{1+x_n} < 1 + 1 = 2$ 且 $x_{n+1} = 1 + \dfrac{x_n}{1+x_n} > 1 > 0$, 故得证.

下面再用数学归纳法证明数列 $\{x_n\}$ 单调增加.
显然 $x_1 < x_2$. 假设 $x_n < x_{n+1}$, 则

$$x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{1+x_{n+1}} - \frac{x_n}{1+x_n} = \frac{x_{n+1} - x_n}{(1+x_{n+1})(1+x_n)} > 0,$$

因此 $x_{n+1} < x_{n+2}$, 故得证.
这样数列 $\{x_n\}$ 单调有界, 从而收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right) = 1 + \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_{n-1}}{1+\lim\limits_{n\to\infty} x_{n-1}} = 1 + \frac{a}{1+a},$$

化简得

$$a^2 - a - 2 = (a-2)(a+1) = 0,$$

该方程的根为 $a = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. 注意到 $x_n > 0$, 舍去负值, 就得到

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

□

六. **设** $x_1 = a, y_1 = b\ (0 < a < b), x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$**.**

1. 证明数列 $\{x_n\}$ 单调增加, 数列 $\{y_n\}$ 单调减少, 且满足 $x_n < y_n (n = 1, 2, \dots)$;

2. 证明数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都收敛, 并且有相同的极限.

证明. 1. 首先用数学归纳法证明

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, x_n < y_n.$$

显然 $x_1 = a < b = y_1$. 假设 $x_n < y_n$, 由平均值不等式,

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \le \frac{x_n + y_n}{2} = y_{n+1},$$

由于等号成立当且仅当 $x_n = y_n$, 于是由假设可知

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} < \frac{x_n + y_n}{2} = y_{n+1}.$$

故得证.
因此, $\forall n \in \mathbb{N}^+$, 我们有

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} > x_n,\ \ y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} < y_n,$$

即数列 $\{x_n\}$ 单调增加, 数列 $\{y_n\}$ 单调减少.

2. 由 **1** 的结论有

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, a = x_1 \leq x_n < y_n \leq y_1 = b,$$

因此数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 单调有界, 从而收敛.
设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = q$, 由

$$q = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n + y_n}{2} = \frac{p+q}{2}$$

即得 $p = q$. □

七. 计算下列极限:

3. $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin\dfrac{\pi}{x}$.

解. 令 $t = \dfrac{\pi}{x}$, 则 $x = \dfrac{\pi}{t}$, 且当 $x \to \infty$ 时, $t \to 0$. 因此

$$\lim_{x\to\infty} x \sin\frac{\pi}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{\pi \sin t}{t} = \pi.$$

□

4. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{\pi - x}$.

解. 令 $t=\pi-x$, 则 $x=\pi-t$, 且当 $x\to\pi$ 时, $t\to 0$. 因此

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi-t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1.$$

□

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\arctan x}$.

解. 令 $t=\arctan x$, 则 $x=\tan t$, 且当 $x\to 0$ 时, $t\to 0$, 于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arctan x}=\lim_{t\to 0}\frac{\tan t}{t}=1.$$

这说明当 $x\to 0$ 时, $\arctan x\sim x$. 因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\arctan x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

□

6. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

解.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}=\sqrt{\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{1-\cos x}}=\sqrt{\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}}=\sqrt{2}.$$

□

7. $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{1}{3^n}$.

解.

$$\lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\frac{\sin\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n}}=0.$$

□

八. 计算下列极限:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n$.

解.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}\\ &= \lim_{m\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}}{1+\frac{1}{m}} \quad (\text{令 } m=n+1)\\ &= e.\end{aligned}$$

□

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x+5}$.

解.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x+5} &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)^{5}\\ &= \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^2\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^{5} \quad (\text{令 } t=\frac{x}{2})\\ &= e^2.\end{aligned}$$

□

3. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-x}$.

解. 令 $t=-x$, 则 $x=-t$, 且当 $x\to 0$ 时, $t\to 0$. 因此

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1-x}=\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{1}{t}}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{e}.$$

□

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$.

解. 令 $t=-\dfrac{2x+1}{2}$, 则 $x=-\dfrac{2t+1}{2}$, 且当 $x\to\infty$ 时, $t\to\infty$. 因此

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^x &= \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{2x+1}\right)^x\\ &= \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-\frac{2t+1}{2}}\\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}}}\\ &= \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

□

5. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{2\cot x}$.

解. 令 $t=\tan x$, 则 $\cot x=\dfrac{1}{t}$, 且当 $x\to 0$ 时, $t\to 0$. 因此

$$\lim_{x\to 0}(1+\tan x)^{2\cot x}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{2}{t}}=\lim_{t\to 0}[(1+t)^{\frac{1}{t}}]^2=e^2.$$

□

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

解. 由于

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}\\ &= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}} \qquad (\text{令 } m=n-1)\\ &= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\cdot\left(1+\frac{1}{m}\right)}\\ &= \frac{1}{e},\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=e\cdot\frac{1}{e}=1.$$

□

九. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=2$, 求 a 的值.

解. 显然 $a\neq 0$. 令 $t=ax$, 则 $x=\dfrac{t}{a}$, 且当 $x\to 0$ 时, $t\to 0$. 于是

$$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{a}{t}}=\lim_{t\to 0}[(1+t)^{\frac{1}{t}}]^a=e^a.$$

因此 $e^a=\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=2$, 解得 $a=\ln 2$. □

十.

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x<0\\ \dfrac{x^2}{1-\cos x}, & x>0,\end{cases}$, 求 $f(0^-), f(0^+)$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解. $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x}{x}=2$,

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$,

由于 $f(0^-)=f(0^+)$, 故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0^-)=f(0^+)=2$. □

十一.

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan ax}{x}, & x<0\\ x^2+x, & x\geq 0,\end{cases}$, 已知 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在, 求 a 的值.

解. 由 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在可知 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+x)=0$,

而若 $a\neq 0$, 则 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\tan ax}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}a\cdot\dfrac{\tan ax}{ax}=a\neq 0$,

因此 $a=0$. □

5　无穷小的比较

一.　比较下列各对无穷小:

4. $\tan x - \sin x$ 与 x^2, $(x \to 0)$.

解.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \tan x = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0,$$
因此当 $x \to 0$ 时, $\tan x - \sin x$ 是 x^2 的高阶无穷小. □

二.　证明: 当 $x \to 0$ 时, 有以下等价无穷小成立.

2. $\tan x - \sin x \sim \dfrac{x^3}{2}$.

解.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\dfrac{x^3}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\dfrac{1}{2}x^2} \cdot \frac{\tan x}{x} = 1.$$
□

三.　利用等价无穷小代换计算下列极限:

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x^2}{x \sin x}$.

解.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x^2}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$
□

2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x^2}$.

解. 令 $t = \dfrac{1}{x}$, 则 $x = \dfrac{1}{t}$, 且当 $x \to \infty$ 时, $t \to 0$. 因此
$$\lim_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x^2} = \lim_{t\to 0} t \cdot \frac{\sin t^2}{t^2} = \lim_{t\to 0} t = 0.$$
□

3. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

解.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot\frac{1}{2}x(1+\sqrt{\cos x})}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

□

四. 当 $x\to 0$ 时, 下列四个无穷小中, 哪一个是比其他三个更高阶的无穷小?

提示. 当 $x\to 0$ 时, $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$, $\sqrt{1-x^2}-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$, 故只能选 D. □

五. 证明: 若 α 是 β 的高阶无穷小, 则 $\alpha+\beta\sim\beta$.

提示.

$$\lim\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\lim\frac{\alpha}{\beta}+1=0+1=1.$$

□

六. 证明无穷小的等价关系具有自反性、对称性和传递性. 问: 无穷小的同阶关系是否具有自反性、对称性和传递性?

提示. 无穷小的同阶关系也具有自反性、对称性和传递性. 根据等价无穷小和同阶无穷小的定义直接验证即得. □

6 连续性与间断点

一. 求函数 $y=x^2+3x+1$ 当 $x=1, \Delta x=0.1$ 时的增量 Δy.

解. $\Delta y=f(1.1)-f(1)=0.51$. □

二. 求下列函数的间断点, 并指出其类型:

1. $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$.

提示. 由 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ 知 $x=0$ 为可去间断点,
由 $\lim\limits_{x\to k\pi} f(x)=\infty$ 知 $x=k\pi\ (k=\pm1,\pm2,\dots)$ 为无穷间断点. □

2. $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+2}{2^{\frac{1}{x}}-2}$.

提示. 由 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\infty$ 知 $x=1$ 为无穷间断点,
由 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$ 及 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$ 知 $x=0$ 为跳跃间断点. □

3. $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}$.

提示. 由 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\dfrac{\pi}{2}$ 及 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\dfrac{\pi}{2}$ 知 $x=0$ 为跳跃间断点. □

三. 求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的连续区间.

解. 由 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}$ 知其连续区间为 $(-\infty,1)$, $(1,2)$ 和 $(2,+\infty)$. □

四.

求函数 $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\le 1 \\ 2x+5, & x>1 \end{cases}$ 的间断点和连续区间, 并确定间断点的类型.

解. 由于 $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=4$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=7$, 故 $x=1$ 为跳跃间断点.
$f(x)$ 的连续区间为 $(-\infty,1)$ 和 $(1,+\infty)$. □

五.

设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4}, & x\neq4\\ a, & x=4\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 求 a 的值.

解.

$$a=\lim_{x\to4}f(x)=\lim_{x\to4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to4}(x+4)=8.$$

□

六. 利用初等函数的连续性计算下列极限:

1. $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\sin x}{x}}$.

解.

$$\lim_{x\to0}e^{\frac{\sin x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}}=e^1=e.$$

□

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

解.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} &= \lim_{x\to0}\frac{\dfrac{(1+x)-1}{\sqrt{1+x}+1}}{\dfrac{(1+x)-1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}\\ &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

□

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

解.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\\ &= 0.\end{aligned}$$

□

七. 判断题:

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义.

1. 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为连续函数, 则 $f(g(x))$ 也为连续函数.

提示. 由复合函数的连续性定理立得. □

2. 若 $f(x)$ 为连续函数, $g(x)$ 有间断点, 则 $f(g(x))$ 必有间断点.

提示. 考虑 $f(x)\equiv 0$, $g(x)=\operatorname{sgn} x$. □

3. 若 $f(x)$ 有间断点, $g(x)$ 为连续函数, 则 $f(g(x))$ 必有间断点.

提示. 考虑 $f(x)=\operatorname{sgn} x$, $g(x)\equiv 0$. □

八.

讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-x)}{x}, & x<0\\ -1, & x=0\\ \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 的连续性.

解. 由于 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\ln(1-x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x}{x}=-1=f(0)$,

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x}{x}=\dfrac{1}{2}\neq\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$,

因此点 $x=0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点, 且 $f(x)$ 在点 $x=0$ 左连续. □

九.

1. 设 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ 且 $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x)$ 存在, 证明:

$$\lim_{x\to\infty}[1+f(x)]^{g(x)}=e^{\lim_{x\to\infty} f(x)g(x)}.$$

证明.

$$\lim_{x\to\infty}[1+f(x)]^{g(x)}=\lim_{x\to\infty} e^{g(x)\ln[1+f(x)]}=e^{\lim_{x\to\infty} g(x)\ln[1+f(x)]}=e^{\lim_{x\to\infty} f(x)g(x)}.$$

上面最后一个等号利用了等价无穷小 $\ln(1+t)\sim t\ (t\to 0)$. □

2. 利用以上公式计算极限 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^x$.

解. 由 $\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{2}{x}=\lim_{x\to\infty} 2\cdot\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}=2$ 得

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^x=e^{\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{2}{x}}=e^2.$$

□

十. 设 $f(x)$ 在点 x_0 连续且 $f(x_0)>0$, 证明: 存在 $\delta>0$, 使得当 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ 时, 有 $f(x)>0$.

证明. 由于 $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)>0$, 取 $\epsilon=\frac{f(x_0)}{2}$, 则

$$\exists\delta>0,\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta),|f(x)-f(x_0)|<\frac{f(x_0)}{2}.$$

因此

$$\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta),f(x)>f(x_0)-\frac{f(x_0)}{2}=\frac{f(x_0)}{2}>0.$$

□

十一. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是连续函数，证明 $\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ 和 $\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ 也是连续函数.

证明. 注意到

$$\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2},$$

$$\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2},$$

因此 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 也是连续函数. □

十二.

1. 在点 x_0 处 $f(x)$ 连续, $g(x)$ 不连续, 则 $f(x) + g(x)$ 和 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 是否连续?

解. $f(x) + g(x)$ 在点 x_0 一定不连续, 否则就有 $g(x) = (f(x) + g(x)) - f(x)$ 在点 x_0 连续.
$f(x)g(x)$ 在点 x_0 有可能连续, 也有可能不连续.
例如, 若 $x_0 = 0, f(x) \equiv 0, g(x) = \mathsf{sgn}\, x$, 则 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 连续.
若 $x_0 = 0, f(x) \equiv 1, g(x) = \mathsf{sgn}\, x$, 则 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 不连续. □

2. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 不连续, 则 $f(x) + g(x)$ 和 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 是否连续?

解. $f(x) + g(x)$ 和 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 都可能连续, 也有可能不连续.
例如, 若 $x_0 = 0$, $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ -1, & x \geq 0, \end{cases}$
则 $f(x) + g(x) \equiv 0$, $f(x)g(x) \equiv -1$, 它们都在点 x_0 连续.
若 $x_0 = 0$, $f(x) = g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}$
则 $f(x) + g(x)$ 和 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 都不连续. □

7 连续函数的性质

一. 举例说明开区间 (a,b) 上连续的函数在该区间上不一定有最大值和最小值, 不一定是有界函数.

提示. 在开区间 $(0,1)$ 上考虑函数 $y=\dfrac{1}{x}$. □

二. 证明方程 $2x=\sin x+2$ 至少有一个小于 $\dfrac{3}{2}$ 的正根.

提示. 令 $f(x)=2x-\sin x-2$, 注意到 $f(0)=-2<0$, 而 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=3-\sin\dfrac{3}{2}-2=1-\sin\dfrac{3}{2}>0$, 由零点定理即得. □

三. 证明方程 $x=a\sin x+b\ (a>0,b>0)$ 至少有一个不超过 $a+b$ 的正根.

提示. 令 $f(x)=x-a\sin x-b$, 注意到 $f(0)=-b<0$, 而 $f(a+b)=a+b-a\sin(a+b)-b=a[1-\sin(a+b)]\geq 0$. 若 $f(a+b)=0$, 则 $a+b$ 就是所求的正根; 否则由零点定理即得. □

四. 三次方程 $x^3-6x^2+9x-3=0$ 有多少个实根? 并指出实根所在区间.

解. 令 $f(x)=x^3-6x^2+9x-3$, 注意到 $f(0)=-3,f(1)=1,f(3)=-3,f(4)=1$, 且 $f(x)$ 至多有 3 个实根. 因此由零点定理可知, 方程 $x^3-6x^2+9x-3=0$ 有三个实根, 分别在区间 $(0,1)$,$(1,3)$ 和 $(3,4)$ 上. □

五. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)>g(a),f(b)<g(b)$. 证明: 在 (a,b) 内至少有一点 c, 使 $f(c)=g(c)$.

证明. 令 $F(x)=f(x)-g(x)$, 则 $F(a)=f(a)-g(a)>0$, $F(b)=f(b)-g(b)<0$. 由零点定理, 存在 $c\in(a,b)$ 使 $F(c)=f(c)-g(c)=0$, 即 $f(c)=g(c)$. □

六. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$. 证明: 存在 $\xi \in [x_1, x_n]$, 使 $f(\xi) = \dfrac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]$.

证明. 令 $m = \min\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}$, $M = \max\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}$, 则 $m \le \dfrac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)] \le M$.
由介值定理, 存在 $\xi \in [x_1, x_n]$, 使 $f(\xi) = \dfrac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]$. □

七. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $0 \le f(x) \le 1$, 证明至少有一点 $c \in [0,1]$, 使 $f(c) = c$.

证明. 如果 $f(0) = 0$ 或 $f(1) = 1$, 则命题已得证; 否则, 令 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g(0) = f(0) - 0 > 0$, $g(1) = f(1) - 1 < 0$, 由零点定理可知存在 $c \in (0,1)$, 使 $g(c) = 0$, 即 $f(c) = c$. □

8 导数概念

一. 设 $f(x)=5x^2$**, 试按定义求** $f'(2)$**.**

解.

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{5(2+\Delta x)^2-5\cdot 2^2}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{20\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(20+\Delta x)=20. \end{aligned}$$

□

二. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$**, 试按定义求** $f'(a)(a\neq 0)$**.**

解.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{a+\Delta x}-\dfrac{1}{a}}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{a(a+\Delta x)\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{a(a+\Delta x)}=-\frac{1}{a^2}. \end{aligned}$$

□

三. 证明: $(\cos x)'=-\sin x$**.**

证明.

$$\begin{aligned} (\cos x)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}-\frac{2\sin\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\\ &= -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\cdot\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\\ &= -\sin x. \end{aligned}$$

□

四. 设 $f'(x_0)$ 存在, 则:

1.

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}\\
=&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}\quad (\text{令 } \Delta x=-h)\\
=&-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\\
=&-f'(x_0).
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]-[f(x_0-h)-f(x_0)]}{h}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}\\
=&f'(x_0)-(-f'(x_0))\\
=&2f'(x_0).
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+ah)-f(x_0+bh)}{h}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{[f(x_0+ah)-f(x_0)]-[f(x_0+bh)-f(x_0)]}{h}\\
=&\lim_{h\to 0}a\cdot\frac{f(x_0+ah)-f(x_0)}{ah}-\lim_{h\to 0}b\cdot\frac{f(x_0+bh)-f(x_0)}{bh}\\
=&af'(x_0)-bf'(x_0)\\
=&(a-b)f'(x_0).
\end{aligned}$$

五. 设 $f'(0)$ 存在, 则:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$.

2. 若 $f(0)=0$, 则 $f'(0)=\dfrac{f(x)}{x}$.

六. 已知 $f(x)$ 在点 x_0 可导, 且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{f(x_0-2h)-f(x_0)}=4$, 求 $f'(x_0)$.

解.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad (令\ h=-\frac{\Delta x}{2}) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{-2h} \\ &= -\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h} \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{f(x_0-2h)-f(x_0)}} \\ &= -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

□

七. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

1. $f(x)=|\sin x|$.

解. 由于

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\sin x=0,\quad \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-\sin x)=0,$$

故

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=0=f(0),$$

因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 又由于

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1,$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\sin\Delta x}{\Delta x}=-1,$$

故 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$, 因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导. □

2. $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & x>0,\\ \sin x, & x\le 0.\end{cases}$

解. 由于

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\ln(1+x)=0,\quad \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\sin x=0,$$

故

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=0=f(0),$$

因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 又由于

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x}=1,$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1,$$

故 $f'(0)=f'_+(0)=f'_-(0)=1$, 因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导. □

八.

讨论 α 取何值时, 函数 $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处 (1) 连续; (2) 可导.

解. (1) 由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0$, 且

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x^\alpha\sin\frac{1}{x}=\begin{cases}0, & \alpha>0,\\ \text{不存在}, & \alpha\le 0.\end{cases}$$

因此当 $\alpha>0$ 时, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0=f(0)$, 即此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(2) 由于 $f'_-(0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0^-} \dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0^-} \dfrac{0}{\Delta x} = 0$, 且

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{(\Delta x)^\alpha \sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} (\Delta x)^{\alpha-1} \sin\frac{1}{\Delta x} = \begin{cases} 0, & \alpha > 1, \\ \text{不存在}, & \alpha \le 1. \end{cases} \end{aligned}$$

因此当 $\alpha > 1$ 时, $f'(0) = f'_+(0) = f'_-(0) = 0$, 即此时 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导. □

九. 设 $f(x) = (x-a)\varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 在 $x = a$ 处连续, 求 $f'(a)$.

解. 由 $\varphi(x)$ 在 $x = a$ 处连续可知 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \varphi(a)$, 因此

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)\varphi(x)}{x-a} = \lim_{x\to a}\varphi(x) = \varphi(a).$$

□

十. 设 $f(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-10)$, 求 $f'(10)$.

解.

$$\begin{aligned} f'(10) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(10+\Delta x)-f(10)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(9+\Delta x)(8+\Delta x)\dots(1+\Delta x)\cdot\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} [(9+\Delta x)(8+\Delta x)\dots(1+\Delta x)] \\ &= 9!. \end{aligned}$$

□

十一.

已知 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \le 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$.

解. 注意到

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

故 $f'(0) = f'_+(0) = f'_-(0) = 1$. 而当 $x < 0$ 时, $f'(x) = \cos x$; 当 $x > 0$ 时, $f'(x) = 1$, 因此

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

□

十二. 求曲线 $y = \ln x$ 在点 $(e, 1)$ 处的切线方程.

解. 所求切线的斜率为 $k = y'|_{x=e} = \left.\frac{1}{x}\right|_{x=e} = \frac{1}{e}$, 因此所求切线方程为

$$y - 1 = \frac{1}{e}(x - e),$$

化简得

$$x - ey = 0.$$

□

十三. 求曲线 $y = e^x$ 经过原点的切线方程.

解. 设切点为 (x_0, y_0), 则切线的斜率为

$$k = y'|_{x=x_0} = e^x|_{x=x_0} = e^{x_0},$$

于是所求切线方程可设为

$$y - y_0 = e^{x_0}(x - x_0).$$

由切线过原点 $(0, 0)$ 有

$$-y_0 = e^{x_0}(-x_0).$$

由于切点在曲线 $y=e^x$ 上, 故有

$$y_0=e^{x_0}.$$

由以上两个方程联立解得 $x_0=1, y_0=e$, 因此所求切线方程为

$$y-e=e(x-1),$$

化简得

$$y=ex.$$

□

十四. 设 $f(x)$ 为偶函数, $f'(0)$ 存在, 证明: $f'(0)=0$.

提示. 用第四大题第 2 小题的做法, 可知

$$f'(0)=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0.$$

□

9 求导法则 (1) 导数的四则运算

一. 求下列函数的导数:

3. $y = \ln x - 2\lg x + 5\log_2 x$.

解.

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{2}{x\ln 10} + \frac{5}{x\ln 2}.$$

$\square$

4. $y = (\sqrt{x}+1)(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1)$.

解. 注意到 $y = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}$, 因此

$$y' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.$$

$\square$

5. $y = \frac{x\ln x}{1+x^2}$.

解.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x\ln x)'(1+x^2) - x\ln x\cdot(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{(\frac{x}{x} + \ln x)(1+x^2) - 2x^2\ln x}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1+x^2+(1-x^2)\ln x}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

$\square$

6. $y = x^2\ln x\cdot\cos x$.

解.

$$\begin{aligned} y' &= 2x\ln x\cdot\cos x + x^2\cdot\frac{1}{x}\cdot\cos x + x^2\ln x\cdot(-\sin x) \\ &= 2x\ln x\cdot\cos x + x\cos x - x^2\ln x\cdot\sin x. \end{aligned}$$

$\square$

二. 设 $f(x) = (1 + x^2)\arctan x$，求 $f'(0)$.

解. $f'(x) = 2x\arctan x + \dfrac{1 + x^2}{1 + x^2} = 1 + 2x\arctan x.$

$f'(0) = f'(x)|_{x=0} = 1.$ $\square$

10 求导法则 (2) 复合函数反函数的导数

一. 求下列函数的导数:

1. $y = (3x+6)^5$.

解.

$$y' = 5(3x+6)^4 \cdot 3 = 15(3x+6)^4.$$

□

2. $y = \sin^3 2x$.

解.

$$y' = 3\sin^2 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 = 6\sin^2 2x \cdot \cos 2x.$$

□

3. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

解.

$$y' = \frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

□

4. $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$.

解.

$$y' = \frac{1 + \frac{1}{2}(a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

□

5. $y = \arctan(x^3)$.

解.

$$y' = \frac{1}{1 + (x^3)^2} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{1 + x^6}.$$

□

6. $y = e^{-\cos^2 \frac{1}{x}}$.

解.

$$\begin{aligned} y' &= e^{-\cos^2 \frac{1}{x}} \cdot \Big(-2\cos\frac{1}{x}\Big) \cdot \Big(-\sin\frac{1}{x}\Big) \cdot \Big(-\frac{1}{x^2}\Big) \\ &= -\frac{1}{x^2} \cdot \Big(2\sin\frac{1}{x} \cdot \cos\frac{1}{x}\Big) \cdot e^{-\cos^2 \frac{1}{x}} \\ &= -\frac{1}{x^2} \sin\frac{2}{x} \cdot e^{-\cos^2 \frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

□

二. 设函数可导, 证明:

1. 偶函数的导数是奇函数.

证明. 设 $f(x)$ 为偶函数, 则

$$f'(-x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} = -f'(x).$$

□

2. 奇函数的导数是偶函数.

证明. 设 $f(x)$ 为奇函数, 则

$$f'(-x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-f(x-h) + f(x)}{h} = f'(x).$$

□

3. 周期函数的导数是周期函数.

证明. 设 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数, 则

$$f'(x+T) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+T+h) - f(x+T)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

□

三. 设 $f(x)$ 可导, 求下列函数的导数:

1. $y = f(e^{-x^2})$.

解.

$$y' = f'(e^{-x^2}) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2xe^{-x^2} f'(e^{-x^2}).$$

□

2. $y = f(\arcsin \frac{1}{x})$.

解.

$$y' = f'(\arcsin \frac{1}{x}) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \cdot (-\frac{1}{x^2}) = -\frac{f'(\arcsin \frac{1}{x})}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}.$$

□

四. 求下列函数的导数:

1. $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$.

解.

$$y' = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x})^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1 + 2\sqrt{x}}{4\sqrt{x(x + \sqrt{x})}}.$$

□

2. $y = \arcsin(1 - 2x)$.

解.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - 2x)^2}} \cdot (-2) = -\frac{1}{\sqrt{x - x^2}}.$$

□

3. $y = \dfrac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}$.

解.

$$y' = \frac{2\cos 2x \cdot (1-\sin 2x) - (1+\sin 2x)(-2\cos 2x)}{(1-\sin 2x)^2} = \frac{4\cos 2x}{(1-\sin 2x)^2}.$$

□

4. $y = \ln(\sec x + \tan x)$.

解.

$$y' = \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} = \sec x.$$

□

五. 设 $g(x) = f(b+mx) + f(b-mx)$, 其中 f 可导, 求 $g'(0)$.

解. 由 $g'(x) = mf'(b+mx) - mf'(b-mx)$ 得 $g'(0) = mf'(b) - mf'(b) = 0$. □

六. 求 $y = \tan\left(\frac{\pi x^2}{4}\right)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程.

解. 所求切线的斜率为

$$k = y'|_{x=1} = \sec^2\left(\frac{\pi x^2}{4}\right) \cdot \frac{\pi x}{2}|_{x=1} = \pi,$$

于是所求切线方程为

$$y - 1 = \pi(x-1),$$

即

$$y = \pi(x-1) + 1.$$

□

七. 求 $y = \frac{1}{x}$ 的经过点 $(2,0)$ 的切线方程.

解. 设切点为 (x_0, y_0), 则切线的斜率为

$$k = y'|_{x=x_0} = -\frac{1}{x^2}\Big|_{x=x_0} = -\frac{1}{x_0^2},$$

于是所求切线方程可设为

$$y - y_0 = -\frac{1}{x_0^2}(x - x_0).$$

由切线过点 $(2,0)$ 有

$$-y_0 = -\frac{1}{x_0^2}(2 - x_0).$$

由于切点在曲线 $y = \dfrac{1}{x}$ 上, 故有

$$y_0 = \frac{1}{x_0}.$$

由以上两个方程联立解得 $x_0 = y_0 = 1$, 因此所求切线方程为

$$y - 1 = -(x - 1),$$

化简得

$$x + y - 2 = 0.$$

□

11 高阶导数

一. 求下列函数的二阶导数:

1. $y = x\ln x$.

解.

$$\begin{aligned} y' &= \ln x + \frac{x}{x} = 1 + \ln x, \\ y'' &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

□

2. $y = (1+x^2)\arctan x$.

解.

$$\begin{aligned} y' &= 2x\arctan x + \frac{1+x^2}{1+x^2} = 1 + 2x\arctan x, \\ y'' &= 2\arctan x + \frac{2x}{1+x^2}. \end{aligned}$$

□

3. $y = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$.

解.

$$\begin{aligned} y' &= \sin(\ln x) + \cos(\ln x) + x\left[\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x} - \sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\right] = 2\cos(\ln x), \\ y'' &= -\frac{2\sin(\ln x)}{x}. \end{aligned}$$

□

4. $y = x^x$.

解. 由 $y = e^{x\ln x}$ 得

$$\begin{aligned} y' &= e^{x\ln x}\left(\frac{x}{x} + \ln x\right) = e^{x\ln x}(1+\ln x), \\ y'' &= e^{x\ln x}(1+\ln x)\cdot(1+\ln x) + e^{x\ln x}\cdot\frac{1}{x} = x^x(1+\ln x)^2 + x^{x-1}. \end{aligned}$$

□

二. 求下列函数的 n 阶导数:

1. $y = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$.

解. 利用教材 101 页例 7 的结果可知

$$y^{(n)} = (x^n)^{(n)} + (a_1 x^{n-1})^{(n)} + (a_2 x^{n-2})^{(n)} + \cdots + (a_{n-1} x)^{(n)} + (a_n)^{(n)} = n!.$$

□

2. $y = \sin(ax + b)$.

解. 利用教材 100 页例 5 的结果可知

$$y^{(n)} = a^n \sin\left(ax + b + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

□

3. $y = \dfrac{1}{ax + b}$.

解. 利用教材 101 页例 7 的结果可知

$$y^{(n)} = [(ax+b)^{-1}]^{(n)} = (-1)(-2)\dots(-n)(ax+b)^{-1-n} \cdot a^n = \frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}.$$

□

4. $y = \dfrac{1-x}{1+x}$.

解. 注意到 $y = \dfrac{2}{1+x} - 1$, 利用教材 101 页例 7 的结果可知

$$y^{(n)} = [2(1+x)^{-1}]^{(n)} = 2 \cdot (-1)(-2)\dots(-n)(1+x)^{-1-n} = \frac{2 \cdot (-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

□

三. 设 $f(x)$ 二阶可导, 求下列函数的二阶导数 y'':

1. $y = f(\sin x)$.

解.

$$\begin{aligned} y' &= f'(\sin x)\cos x, \\ y'' &= f''(\sin x)\cos x\cdot\cos x - f'(\sin x)\sin x \\ &= f''(\sin x)\cos^2 x - f'(\sin x)\sin x. \end{aligned}$$

□

2. $y = e^{f(x)}$.

解.

$$y' = e^{f(x)}f'(x),$$
$$y'' = e^{f(x)}f'(x)\cdot f'(x) + e^{f(x)}f''(x) = e^{f(x)}((f'(x))^2 + f''(x)).$$

□

四. 求函数 $y = x^3e^x$ 的 15 阶导数.

解. 设 $u = e^x$, $v = x^3$, 则

$$u^{(k)} = e^x(k = 1, 2, \ldots, 15),$$

$$v' = 3x^2, v'' = 6x, v''' = 6, v^{(k)} = 0(k = 4, 5, \ldots, 15).$$

由 Leibniz 公式,

$$\begin{aligned} y^{(15)} &= (uv)^{(15)} \\ &= C_{15}^0u^{(15)}v + C_{15}^1u^{(14)}v' + C_{15}^2u^{(13)}v'' + C_{15}^3u^{(12)}v''' \\ &= e^x\cdot x^3 + 15\cdot e^x\cdot 3x^2 + \frac{15\cdot 14}{2!}e^x\cdot 6x + \frac{15\cdot 14\cdot 13}{3!}e^x\cdot 6 \\ &= (x^3 + 45x^2 + 630x + 2730)e^x. \end{aligned}$$

□

五.

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有连续的二阶导数, 且 $f(0)=0$. 设
$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$. 确定 a 的值, 使 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

解.

$$a=g(0)=\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0).$$

□

六. 试从公式 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{y'}$ 中导出下列反函数的高阶导数公式:

1. $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$.

证明.

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{y''}{(y')^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}.$$

□

2. $\dfrac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}y^3}=\dfrac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$.

证明.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}y^3} &= \frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right)}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right)}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\\ &= -\frac{y'''(y')^3-y''\cdot 3(y')^2y''}{(y')^6}\cdot\frac{1}{y'}\\ &= \frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}.\end{aligned}$$

□

12 隐函数参数方程求导, 相关变化率

一. 求下列方程所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

1. $x^3+y^3=6xy$.

解. 两边求微分得

$$3x^2\mathrm{d}x+3y^2\mathrm{d}y=6(x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x),$$

即

$$(3y^2-6x)\mathrm{d}y=(6y-3x^2)\mathrm{d}x,$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{6y-3x^2}{3y^2-6x}=\frac{2y-x^2}{y^2-2x}.$$

□

2. $\sin(x+y)=y^2\cos x$.

解. 两边求微分得

$$\cos(x+y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)=\cos x\cdot 2y\mathrm{d}y-y^2\sin x\mathrm{d}x,$$

即

$$(\cos(x+y)-2y\cos x)\mathrm{d}y=-(y^2\cos x+\cos(x+y))\mathrm{d}x,$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2\sin x+\cos(x+y)}{2y\cos x-\cos(x+y)}.$$

□

3. $\ln(x^2+y^2)=\arctan\dfrac{y}{x}$.

解. 两边求微分得

$$\frac{2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\frac{\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}=\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2},$$

即

$$(2y-x)\mathrm{d}y=-(2x+y)\mathrm{d}x,$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2x+y}{x-2y}.$$

□

二. 求曲线 $y^2=5x^4-x^2$ 在点 $(1,2)$ 处的切线方程.

解. 对曲线方程两边求微分得

$$2y\mathrm{d}y=20x^3\mathrm{d}x-2x\mathrm{d}x,$$

于是

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x,y)=(1,2)}=\left.\frac{20x^3-2x}{2y}\right|_{(x,y)=(1,2)}=\frac{9}{2}.$$

因此所求切线方程为

$$y-2=\frac{9}{2}(x-1),$$

化简得

$$9x-2y-5=0.$$

□

三. 证明: 曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ 上任意点处的切线在两坐标轴上的截距之和恒为 a.

证明. 对曲线方程两边求微分得

$$\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}+\frac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{y}}=0,$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}.$$

因此曲线上任意点 (x_0,y_0) 处的切线为

$$y-y_0=-\frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}}(x-x_0),$$

在上式中令 $x=0$, 得到它在 y-轴上的截距为 $y_0+\sqrt{x_0y_0}$; 令 $y=0$, 得到它在 x-轴上的截距为 $x_0+\sqrt{x_0y_0}$. 因此它在两坐标轴上的截距之和为

$$(x_0+\sqrt{x_0y_0})+(y_0+\sqrt{x_0y_0})=x_0+2\sqrt{x_0y_0}+y_0=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=a.$$

□

四. 设函数 $y=y(x)$ 满足方程 $e^{xy}+\sin(x^2y)=y$, 求 $y'(0)$.

解. 在方程两边对 x 求导得

$$y'=e^{xy}(xy'+y)+(2xy+x^2y')\cos(x^2y),$$

当 $x=0$ 时, 由原方程解出 $y=1$, 因此 $y'(0)=1$. □

五. 求下列函数的导数:

1. $y=x^{\sqrt{x}}$.

解. 两边取对数得

$$\ln y=\sqrt{x}\ln x,$$

两边求微分得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\Big(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\frac{\sqrt{x}}{x}\Big)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}(2+\ln x),$$

因此

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{2\sqrt{x}}(2+\ln x)=\frac{x^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}(2+\ln x).$$

□

2. $y=(\ln x)^x$.

解. 两边取对数得

$$\ln y = x\ln(\ln x),$$

两边求微分得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \left(x\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}+\ln(\ln x)\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{\ln x}+\ln(\ln x)\right]\mathrm{d}x,$$

因此

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\left[\frac{1}{\ln x}+\ln(\ln x)\right]=(\ln x)^x\left[\frac{1}{\ln x}+\ln(\ln x)\right].$$

□

3. $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

解. 两边取对数得

$$\ln y=\frac{1}{2}[\ln(1+x)-\ln(1-x)],$$

两边求微分得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x,$$

因此

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)=\frac{y}{1-x^2}.$$

□

4. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}$.

解. 当 $x>1$ 时, 两边取对数得

$$\ln y=\frac{1}{3}[\ln x+\ln(x^2+1)-2\ln(x-1)],$$

两边求微分得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x,$$

因此

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{3}\Big(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2}{x-1}\Big). \tag{1}$$

当 $0 < x < 1$ 时, $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(1-x)^2}}$;

当 $x < 0$ 时, $y = -\sqrt[3]{\dfrac{(-x)(x^2+1)}{(1-x)^2}}$;

这时同理可得 y' 的表达式与 (1) 式相同. □

六. 设 $x^y = y^x$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解. 两边取对数得

$$y \ln x = x \ln y$$

两边求微分得

$$\ln x \mathrm{d}y + \frac{y\mathrm{d}x}{x} = \ln y \mathrm{d}x + \frac{x\mathrm{d}y}{y},$$

即

$$\Big(\frac{x}{y} - \ln x\Big)\mathrm{d}y = \Big(\frac{y}{x} - \ln y\Big)\mathrm{d}x,$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{y}{x} - \ln y}{\frac{x}{y} - \ln x} = \frac{y^2 - xy\ln y}{x^2 - xy\ln x}.$$

□

七. 求下列隐函数的一阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

1. $x^4 + y^4 = 16$.

解. 两边求微分得

$$4x^3\mathrm{d}x + 4y^3\mathrm{d}y = 0,$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x^3}{y^3},$$

在上式中再对 x 求导得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= -\frac{3x^2y^3-3x^3y^2y'}{y^6}=-\frac{3x^2y^3-3x^3y^2\cdot\left(-\dfrac{x^3}{y^3}\right)}{y^6}\\ &= -\frac{3x^2y^2(x^4+y^4)}{y^9}=-\frac{48x^2}{y^7}.\end{aligned}$$

□

2. $e^y=xy+3$.

解. 两边求微分得

$$e^y\mathrm{d}y=x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x,$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{e^y-x},$$

在上式中再对 x 求导得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{y'(e^y-x)-y(e^yy'-1)}{(e^y-x)^2}\\ &= \frac{\dfrac{y}{e^y-x}\cdot(e^y-x)-y\left(e^y\cdot\dfrac{y}{e^y-x}-1\right)}{(e^y-x)^2}\\ &= \frac{2y(e^y-x)-y^2e^y}{(e^y-x)^3}.\end{aligned}$$

□

八. 已知 $y-xe^y=1$, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

解. 在方程两边对 x 求导得

$$y'-e^y-xe^yy'=0,$$

于是

$$y'=\frac{e^y}{1-xe^y}=\frac{e^y}{2-y}.$$

在上式中再对 x 求导得

$$y'' = \frac{e^y(2-y)+e^y}{(2-y)^2}\cdot y' = \frac{e^y(2-y)+e^y}{(2-y)^2}\cdot\frac{e^y}{2-y}.$$

当 $x=0$ 时, 由原方程解出 $y=1$, 代入上式得 $y''(0)=2e^2$. □

九. 求下列参数方程所确定的函数 $y=y(x)$ 的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

1. $\begin{cases} x = t^3+3t+1, \\ y = 3t^5+5t^3+1. \end{cases}$

解.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{15t^4+15t^2}{3t^2+3} = 5t^2.$$

□

2. $\begin{cases} x = e^{-t}\sin t, \\ y = e^t\cos t. \end{cases}$

解.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{e^t(\cos t-\sin t)}{e^{-t}(\cos t-\sin t)} = e^{2t}.$$

□

3. $\begin{cases} x = \arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}. \end{cases}$

解法一. 首先,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)' = -\frac{1}{2}(1+t^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2t = -t(1+t^2)^{-\frac{3}{2}},$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{-\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)'}{\sqrt{1-\frac{1}{1+t^2}}}}{\frac{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)'}{\sqrt{1-\frac{t^2}{1+t^2}}}} = -\frac{1}{|t|}\cdot\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)'}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}+t\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)'}\\ &= -\frac{1}{|t|}\cdot\frac{-t(1+t^2)^{-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}-t^2(1+t^2)^{-\frac{3}{2}}} = \frac{t}{|t|} = \begin{cases}1, & t>0,\\ -1, & t<0.\end{cases}\end{aligned}$$

□

解法二. 由 $y=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ 得 $\cos y=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$,
并且由 $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}>0$ 可知 $y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$. 于是

$$\sin y=\sqrt{1-\cos^2 y}=\sqrt{1-\frac{1}{1+t^2}}=\frac{|t|}{\sqrt{1+t^2}},$$

从而

$$y=\arcsin\frac{|t|}{\sqrt{1+t^2}}=\begin{cases}\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}=x, & t>0,\\ -\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}=-x, & t<0.\end{cases}$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\begin{cases}1, & t>0,\\ -1, & t<0.\end{cases}$$

□

十. 求 $x=\frac{3at}{1+t^2}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^2}$ 在 $t=2$ 处的切线和法线方程.

解. 注意到

$$y=tx,$$

在上式两边求微分得

$$\mathrm{d}y = t\mathrm{d}x + x\mathrm{d}t,$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= x\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} + t = \frac{x}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} + t \\ &= \frac{x(1+t^2)^2}{3a(1+t^2) - 3at\cdot 2t} + t = \frac{3at(1+t^2)}{3a(1-t^2)} + t = \frac{t(1+t^2)}{(1-t^2)} + t,\end{aligned}$$

所求切线的斜率为

$$k = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=2} = \frac{2(1+4)}{1-4} + 2 = -\frac{4}{3},$$

当 $t = 2$ 时, $x = \dfrac{6a}{5}$, $y = \dfrac{12a}{5}$, 故所求切线方程为

$$y - \frac{12a}{5} = -\frac{4}{3}\Big(x - \frac{6a}{5}\Big),$$

化简得

$$4x + 3y - 12a = 0.$$

所求法线的斜率为

$$k' = -\frac{1}{k} = \frac{3}{4},$$

故所求法线方程为

$$y - \frac{12a}{5} = \frac{3}{4}\Big(x - \frac{6a}{5}\Big),$$

化简得

$$3x - 4y + 6a = 0.$$

□

十一. **设** $x = at^3$**,** $y = bt^2$**, 求** $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$**.**

解.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{2bt}{3at^2} = \frac{2b}{3at}.$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{2b}{3at}\right)}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = -\frac{2b}{3at^2} \cdot \frac{1}{3at^2} = -\frac{2b}{9a^2t^4}.$$

□

十二.

设 $\begin{cases} x = \ln(1+t) \\ y = \arctan t \end{cases}$，求 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$.

解.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t}} = \frac{1+t}{1+t^2},$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1+t}{1+t^2}\right)}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} \\ &= \frac{1+t^2-2t(1+t)}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{1+t}} = \frac{(1+t)(1-2t-t^2)}{(1+t^2)^2},\end{aligned}$$

于是

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0} = 1.$$

□

十三.

设 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}$.

解.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{1 - \frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t^2}{2t} = \frac{t}{2},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{t}{2}\right)}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{4t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right)}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1+t^2}{4t}\right)}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{2t \cdot 4t - 4(1+t^2)}{16t^2} \cdot \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t^4 - 1}{8t^3}.$$

□

十四.

设 $y = y(x)$ 是由方程 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + 3 \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$ 所确定的隐函数, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$ 和 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$.

解. 对 $e^y \sin t - y + 1 = 0$ 两边求微分得

$$e^y \sin t \mathrm{d}y + e^y \cos t \mathrm{d}t - \mathrm{d}y = 0,$$

故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{e^y \cos t}{1 - e^y \sin t} = \frac{e^y \cos t}{2 - y},$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\dfrac{e^y\cos t}{2-y}}{6t+2}=\frac{e^y\cos t}{2(3t+1)(2-y)}.$$

当 $t=0$ 时, $y=1$, 因此

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=\frac{e}{2}.$$

又由于

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\\&=\frac{\left(e^y\cos t\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-e^y\sin t\right)(3t+1)(2-y)-e^y\cos t\left[3(2-y)-(3t+1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right]}{2(3t+1)^2(2-y)^2(6t+2)},\end{aligned}$$

而

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\left.\frac{e^y\cos t}{2-y}\right|_{t=0}=e,$$

因此

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=\frac{e^2-e(3-e)}{4}=-\frac{e(2e-3)}{4}.$$

□

十五. 一个球形雪球的体积以 $1\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{min}$ 的速度减少, 求直径为 10 cm 时, 雪球直径减少的速度.

解. 设 t min 后雪球的体积为 y, 直径为 x, 则

$$y=\frac{\pi x^3}{6}.$$

在上式两边对 t 求导得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi x^2}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

由已知条件, 存在时刻 t_0, 使 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} = -1\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{min}$, $x|_{t=t_0} = 10$ cm.
代入上式得直径为 10 cm 时, 雪球直径减少的速度为

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} = -1 \cdot \frac{2}{\pi \cdot 10^2} = -\frac{1}{50\pi}\ \mathrm{cm/min}.$$

□

十六. 将水注入深 8 m, 上顶直径为 8 m 的正圆锥形容器中, 注水速度为 $4\ \mathrm{m}^3/\mathrm{min}$, 当水深为 5 m 时, 其表面上升的速度为多少? 表面上升的加速度又为多少?

解. 设 t min 后水深 h, 则此时水的表面半径为 $\dfrac{h}{2}$, 于是已注入水的体积为

$$\frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = 4t,$$

化简得

$$h^3 = \frac{48t}{\pi}.$$

在上式两边求微分得

$$3h^2\mathrm{d}h = \frac{48\mathrm{d}t}{\pi},$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{16}{\pi h^2}.$$

当水深为 5 m 时, 其表面上升的速度为

$$\left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right|_{h=5} = \frac{16}{\pi \cdot 5^2} = \frac{16}{25\pi}\ \mathrm{m/min}.$$

又由于

$$\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)}{\mathrm{d}h} \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{32}{\pi h^3} \cdot \frac{16}{\pi h^2} = -\frac{512}{\pi^2 h^5},$$

故当水深为 5 m 时, 其表面上升的加速度为

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2}\right|_{h=5} = -\frac{512}{\pi^2 \cdot 5^5} = -\frac{512}{3125\pi^2}\ \mathrm{m/min}^2.$$

□

13　函数的微分

一.　填空题:

1. $\dfrac{1}{1+4x^2}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+(2x)^2}\mathrm{d}(2x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(\arctan 2x) = \mathrm{d}\Big(\dfrac{1}{2}\arctan 2x\Big).$

2. $\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}\mathrm{d}(2x) = \mathrm{d}(\sqrt{1+2x}).$

3. $\dfrac{f'(\arctan x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = f'(\arctan x)\mathrm{d}(\arctan x) = \mathrm{d}[f(\arctan x)].$

4. $\mathrm{d}2^{\arctan^3 x} = 2^{\arctan^3 x}\ln 2\mathrm{d}(\arctan^3 x).$

二.　计算微分:

1. $\mathrm{d}(x^2\ln x + \arcsin 2x) = \Big(2x\ln x + x + \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\Big)\mathrm{d}x.$

2. $\mathrm{d}(\arctan e^{\sqrt{x}}) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{1+(e^{\sqrt{x}})^2}\mathrm{d}x = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1+e^{2\sqrt{x}})}\mathrm{d}x.$

3. $\mathrm{d}\Big(\dfrac{2^x}{x^2+1}\Big) = \dfrac{2^x\ln 2\cdot(x^2+1) - 2^x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \dfrac{2^x(x^2+1)\ln 2 - x\cdot 2^{x+1}}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x.$

4. $u=u(x)$, $v=v(x)$ 为可导函数, 求 $y=\arctan\dfrac{u}{v}$ 的微分.

解.

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}\Big(\arctan\frac{u}{v}\Big) = \frac{\mathrm{d}(\frac{u}{v})}{1+\Big(\dfrac{u}{v}\Big)^2} = \frac{\dfrac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}}{1+\Big(\dfrac{u}{v}\Big)^2} = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{u^2+v^2}.$$

□

三. 求隐函数或参数方程决定函数的导数:

1. $y = y(x)$ 由方程 $x^2 y + e^y = \ln x$ 决定, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解. 两边求微分得

$$2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y + e^y\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

于是

$$(2x^y - 1)\mathrm{d}x = -x(x^2 + e^y)\mathrm{d}y,$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1 - 2x^2 y}{x(x^2 + e^y)}.$$

□

2. $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = e^{2t} - 2e^t + 3 \\ y = 3e^{4t} - 4e^{3t} + 7 \end{cases}$ 确定, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{12e^{4t} - 12e^{3t}}{2e^{2t} - 2e^t} = 6e^{2t}.$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(6e^{2t})}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = 12e^{2t} \cdot \frac{1}{2e^{2t} - 2e^t} = \frac{6e^t}{e^t - 1}.$$

□

四. 求 $\arctan 1.05$ 的近似值.

解. 考虑 $f(x) = \arctan x$, 利用

$$f(x) \approx f(1) + f'(1)(x - 1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x - 1)$$

得

$$\arctan 1.05 \approx f(1.05) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0.05 \approx 0.81.$$

□

五. 利用微分的近似公式证明: $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$**.**

证明. 考虑 $f(x)=(1+x)^\alpha$, 则

$$(1+x)^\alpha \approx f(0)+f'(0)x = 1+\alpha x.$$

$\square$

14 微分中值定理

一. 证明 $\dfrac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2} < \dfrac{a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a} < \dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}$**, 其中** $a > 1, n \geq 1$**.**

证明. 在 $[n, n+1]$ 上对 $f(x) = a^{\frac{1}{x}}$ 应用 Lagrange 中值定理得

$$\exists \xi \in (n, n+1), f'(\xi) = \frac{a^{\frac{1}{n+1}} - a^{\frac{1}{n}}}{(n+1) - n} = a^{\frac{1}{n+1}} - a^{\frac{1}{n}},$$

这里

$$f'(\xi) = -\frac{a^{\frac{1}{\xi}} \ln a}{\xi^2},$$

于是

$$\frac{a^{\frac{1}{\xi}} \ln a}{\xi^2} = a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}},$$

因此

$$\frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2} < \frac{a^{\frac{1}{\xi}}}{\xi^2} = \frac{a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a} = \frac{a^{\frac{1}{\xi}}}{\xi^2} < \frac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}.$$

□

二. 对 $f(x) = x^3$ **在** $[-2, 3]$ **上求出满足 Lagrange 中值定理的** ξ**.**

解. 由 Lagrange 中值定理,

$$f'(\xi) = \frac{f(3) - f(-2)}{3 - (-2)} = \frac{27 + 8}{5} = 7,$$

于是由

$$f'(\xi) = 3\xi^2 = 7$$

解出

$$\xi = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

□

三. $f(x)$ **在** $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ **上可导, 则** $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ **内至少存在一点** ξ**, 使** $f'(\xi)\sin 2\xi + 2f(\xi)\cos 2\xi = 0$**.**

证明. 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上对 $g(x)=f(x)\sin 2x$ 应用 Lagrange 中值定理得

$$\exists\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right), g'(\xi)=\frac{g\left(\frac{\pi}{2}\right)-g(0)}{2\pi-0}=0.$$

注意到

$$g'(\xi)=f'(\xi)\sin 2\xi+2f(\xi)\cos 2\xi,$$

因此

$$f'(\xi)\sin 2\xi+2f(\xi)\cos 2\xi=0.$$

□

四. $f(x)$ **可导,** $1<f(x)<4$**,** $f'(x)\neq 2x$**, 则方程** $f(x)=x^2$ **在** $(1,2)$ **内有且仅有一根.**

证明. 令 $g(x)=f(x)-x^2$, 则 $g(1)=f(1)-1>0$, $g(2)=f(2)-4<0$, 由零点定理可知方程 $f(x)=x^2$ 在 $(1,2)$ 内有根.

假设 $f(x)=x^2$ 在 $(1,2)$ 内有两个不同的根 ξ_1 和 ξ_2, 则 $g(\xi_1)=g(\xi_2)=0$. 不妨设 $\xi_1<\xi_2$, 由 Rolle 定理, 至少有一点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ 使得 $g'(\xi)=f'(\xi)-2\xi=0$, 矛盾. 故方程 $f(x)=x^2$ 在 $(1,2)$ 内有且仅有一根. □

五. $f(x)$ **为可导函数,** $f(0)=1$**,** $f'(x)=2f(x)$**, 证明:** $f(x)=e^{2x}$**.**

证明. 由于

$$\left(\frac{f(x)}{e^{2x}}\right)'=\frac{f'(x)e^{2x}-2f(x)e^{2x}}{e^{4x}}=\frac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}}=0,$$

因此

$$\frac{f(x)}{e^{2x}}\equiv C,\ \ C \text{ 为常数.}$$

又由 $f(0)=1$ 得 $C=1$, 故 $f(x)=e^{2x}$. □

六. $f(x)$ **二阶可导,** $F(x) = (x-a)^2 f(x)$**,** $f(b) = 0$**, 证明: 存在** $\xi \in (a,b)$**, 使** $F''(\xi) = 0$**.**

证明. 根据 Rolle 定理, 由于 $F(a) = F(b) = 0$, 存在 $\eta \in (a,b)$ 使 $F'(\eta) = 0$. 又由于 $F'(a) = F'(\eta) = 0$, 存在 $\xi \in (a,\eta) \subset (a,b)$ 使 $F''(\xi) = 0$. □

附加题:

1. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, (a,b) 上可导, 且 $|f'(x)| \neq 1$, 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$ 及 $\eta \in (a,b)$, 使 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \dfrac{e^b - e^a}{b-a} e^{-\eta}$.

证明. 在 $[a,b]$ 上对 $f(x)$ 应用 Lagrange 中值定理得

$$\exists \xi \in (a,b), f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

再在 $[a,b]$ 上对 $f(x)$ 和 $g(x) = e^x$ 应用 Cauchy 中值定理得

$$\exists \eta \in (a,b), \frac{f'(\eta)}{e^\eta} = \frac{f(b)-f(a)}{e^b - e^a} = \frac{f'(\xi)(b-a)}{e^b - e^a},$$

因此

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b-a} e^{-\eta}.$$

□

2. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 证明: 存在 $\xi_1, \xi_2 \in (a,b)$, 使 $(b+a)f'(\xi_1) = 2\xi_1 f'(\xi_2)$.

证明. 在 $[a,b]$ 上对 $f(x)$ 应用 Lagrange 中值定理得

$$\exists \xi_2 \in (a,b), f(b) - f(a) = f'(\xi_2)(b-a).$$

再在 $[a,b]$ 上对 $f(x)$ 和 $g(x) = x^2$ 应用 Cauchy 中值定理得

$$\exists \xi_1 \in (a,b), \frac{f'(\xi_1)}{2\xi_1} = \frac{f(b)-f(a)}{b^2 - a^2} = \frac{f'(\xi_2)(b-a)}{b^2 - a^2} = \frac{f'(\xi_2)}{b+a},$$

因此

$$(b+a)f'(\xi_1) = 2\xi_1 f'(\xi_2).$$

□

15 L'Hospital 法则

一. 求下列各极限:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{e^x-x-1}$.

解.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{e^x-x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x}}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{(1+x)^2}}{e^x}=1.$$

□

2. $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}$.

解.

$$\lim_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^{-2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^{-3}e^{\frac{1}{x^2}}}{-2x^{-3}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}}=+\infty.$$

□

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln x}+\dfrac{1}{1-x}\right)$.

解.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{1-x}\right)&=\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{(1-x)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x}-1}{\dfrac{1-x}{x}-\ln x}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{-\dfrac{1}{x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

4. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

解. 由于

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\ln x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}\cdot\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)}{\frac{1}{x}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{1+x^2}}{\arctan x-\frac{\pi}{2}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}}{\frac{1}{1+x^2}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}\\
&= -1,
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}{\ln x}} = \frac{1}{e}.$$

□

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$.

解. 由于

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}}{2} = -\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

□

6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a_i>0, i=1,2,\ldots,n)$.

解. 由于

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)-\ln n}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}\\ &= \frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}\\ &= \ln\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n},\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} &= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)-\ln n}{x}}\\ &= e^{\ln\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}\\ &= \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}.\end{aligned}$$

□

二.

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$, 求 $f'(0)$, $f''(0)$.

解.

$$\begin{aligned}f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{e^x-1}{x}-1}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

当 $x\neq 0$ 时,

$$f'(x)=\frac{xe^x-(e^x-1)}{x^2}=\frac{(x-1)e^x+1}{x^2},$$

因此

$$\begin{aligned}
f''(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{(x-1)e^x+1}{x^2}-\dfrac{1}{2}}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(x-1)e^x+1-\dfrac{x^2}{2}}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{xe^x-x}{3x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{3} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

□

三. 已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\ln x-ax+2}{1+\cos(\pi x)}=b$, 求 a,b.

解. 由于 $\lim\limits_{x\to 1}[1+\cos(\pi x)]=0$, 要使 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\ln x-ax+2}{1+\cos(\pi x)}$ 存在, 只能有

$$\lim_{x\to 1}(2\ln x-ax+2)=(2\ln x-ax+2)|_{x=1}=-a+2=0,$$

从而 $a=2$, 此时

$$b=\lim_{x\to 1}\frac{2\ln x-2x+2}{1+\cos(\pi x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{2}{x}-2}{-\pi\sin(\pi x)}=\lim_{x\to 1}\frac{-\dfrac{2}{x^2}}{-\pi^2\cos(\pi x)}=-\frac{2}{\pi^2}.$$

□

四. 求 a,b, 使 $x\to 0$ 时 $f(x)=\sin 2x+ax+bx^3$ 为尽可能高阶的无穷小, 并求它的阶.

解. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+ax+bx^3}{x^n}=c\neq 0$. 要使

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+ax+bx^3}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x+a+3bx^2}{nx^{n-1}}$$

存在, 由 $\lim\limits_{x\to 0}nx^{n-1}=0$ 可知

$$\lim_{x\to 0}(2\cos 2x+a+3bx^2)=(2\cos 2x+a+3bx^2)|_{x=0}=2+a=0,$$

从而 $a=-2$. 同理, 要使

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+ax+bx^3}{x^n} &= \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x+a+3bx^2}{nx^{n-1}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-4\sin 2x+6bx}{n(n-1)x^{n-2}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-8\cos 2x+6b}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}\end{aligned}$$

存在, 则

$$\lim_{x\to 0}(-8\cos 2x+6b)=(-8\cos 2x+6b)|_{x=0}=-8+6b=0,$$

从而 $b=\dfrac{4}{3}$. 于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+ax+bx^3}{x^n} &= \lim_{x\to 0}\frac{-8\cos 2x+8}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{16\sin 2x}{n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{32\cos 2x}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-5)x^{n-5}}=c\neq 0\end{aligned}$$

意味着 $n=5$, 此时

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+ax+bx^3}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{32\cos 2x}{5!}=\frac{4}{15}.$$

因此 $a=-2$, $b=\dfrac{4}{3}$ 使 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 为关于 x 的 5 阶无穷小. □

附加题: $f(x)$ 在 $x_0=0$ 处二阶可导, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+2}{x^2}=3$, 求 $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$.

解. 由于 $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$, 要使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+2}{x^2}$ 存在, 只能有

$$\lim_{x\to 0}[f(x)+2]=[f(x)+2]|_{x=0}=f(0)+2=0,$$

因此 $f(0) = -2$. 于是

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x \cdot \frac{f(x) + 2}{x^2} = 0 \cdot 3 = 0,$$

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) + 2}{\frac{1}{2}x^2} = 6.$$

□

16 Taylor 公式

一. $f(x) = x\arctan x$ **在** $x_0 = 1$ **处展开为二阶 Taylor 公式.**

解. 由于

$$f'(x) = \frac{x}{1+x^2} + \arctan x,$$

$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2 - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2},$$

$$f'''(x) = -\frac{8x}{(1+x^2)^3},$$

故 $f(1) = \frac{\pi}{4}$, $f'(1) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$, $f''(1) = \frac{1}{4}$. 因此 $f(x)$ 在 $x_0 = 1$ 处带 Lagrange 余项的 Taylor 公式为

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3 \\ &= \frac{\pi}{4} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{4\xi}{3(1+\xi^2)^3}(x-1)^3, \end{aligned}$$

这里 ξ 在 x_0 和 x 之间. □

二. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$ **展开** $x - 1$ **的多项式.**

解. 由于

$$f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 10x + 1,$$

$$f''(x) = 12x^2 - 30x + 10,$$

$$f'''(x) = 24x - 30,$$

$$f^{(4)}(x) = 24,$$

因此

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 \\ &= 4 - 4(x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4. \end{aligned}$$

□

三. 求 $x \to 0$ 时, 无穷小量 $e^x - 1 - x + x\sin x$ 的阶.

解. 由 Maclaurin 公式,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2),$$

$$\sin x = x + o(x),$$

故

$$\begin{aligned} e^x - 1 - x + x\sin x &= \left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right] - 1 - x + x[x + o(x)] \\ &= \left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right] - 1 - x + [x^2 + o(x^2)] \\ &= \frac{3}{2}x^2 + o(x^2), \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x + x\sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{3}{2} \neq 0,$$

即 $x \to 0$ 时, 无穷小量 $e^x - 1 - x + x\sin x$ 为 2 阶. □

四. 求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2 + 2\cos x - 2}{x^4}$.

解.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2 + 2\cos x - 2}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + o(x^4) + 2\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right] - 2}{x^4} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{12} + o(x^4)}{x^4} \\ &= \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

□

五. 已知 $0 < x < \frac{1}{2}$**, 证明:** $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ **的绝对误差不超过** 0.01**, 并求** $\sqrt{e}$ **的误差不超过** 0.01 **的近似值.**

解. 由带 Lagrange 余项的 Maclaurin 公式,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{e^{\theta x}}{4!}x^4 \ \ (0 < \theta < 1),$$

故当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时,

$$\left|e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)\right| = \left|\frac{e^{\theta x}}{24}x^4\right| < \left|\frac{e^{\frac{1}{2}}}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4\right| < \frac{3}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{128} < 0.01,$$

即 $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ 的绝对误差不超过 0.01, 并且

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{6} = 1 + \frac{31}{48} \approx 1.65.$$

□

附加题: $f(x)$ **在区间** $[a, b]$ **有二阶导数, 且** $f'(a) = f'(b) = 0$**. 试证明:** (a, b) **内至少有一点** ξ**, 使得** $|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|$**.**

证明. $f(x)$ 在 $x = a$ 和 $x = b$ 处带 Lagrange 余项的的 Taylor 公式分别为

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2 = f(a) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2, \ a < \xi_1 < x,$$

$$f(x) = f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(x-b)^2 = f(b) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(x-b)^2, \ x < \xi_2 < b,$$

因此

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + \frac{f''(\xi_1)}{2}\left(\frac{a+b}{2} - a\right)^2 = f(a) + \frac{(b-a)^2}{8}f''(\xi_1), \qquad (1)$$

同理可得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + \frac{(b-a)^2}{8}f''(\xi_2), \qquad (2)$$

其中 $a < \xi_1 < \dfrac{a+b}{2} < \xi_2 < b$.

由 (1) 式减去 (2) 式得

$$f(b) - f(a) = \frac{(b-a)^2}{8}(f''(\xi_1) - f''(\xi_2)),$$

设

$$\xi = \begin{cases} \xi_1, & \text{若 } |f''(\xi_1)| \geq |f''(\xi_2)|, \\ \xi_2, & \text{若 } |f''(\xi_1)| < |f''(\xi_2)|, \end{cases}$$

则

$$2|f(\xi)| \geq |f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)| \geq |f''(\xi_1) - f''(\xi_2)| = \frac{8}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|,$$

因此

$$|f(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|.$$

$\square$

17 函数的单调性, 极值和最值

一. 求下列函数的极值点和单调区间:

1. $f(x)=\sqrt[3]{x-1}(x-3)^2$.

解.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}(x-3)^2+2\sqrt[3]{x-1}(x-3)\\
&= \frac{(x-3)^2+6(x-1)(x-2)}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}}\\
&= \frac{7x^2-30x+27}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}}\\
&= \frac{(x-3)(7x-9)}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}},
\end{aligned}$$

由 $f'(x)=0$ 得到 $f(x)$ 的驻点为 $x_1=\dfrac{9}{7}$ 和 $x_2=3$, 而 $x_3=1$ 为 $f(x)$ 的不可导点.

在 $(-\infty,1)$ 内, $f'(x)>0$; 在 $\left(1,\dfrac{9}{7}\right)$ 内, $f'(x)>0$; 在 $\left(\dfrac{9}{7},3\right)$ 内, $f'(x)<0$; 在 $(3,+\infty)$ 内, $f'(x)>0$. 因此驻点 $x_1=\dfrac{9}{7}$ 为极大值点, 驻点 $x_2=3$ 为极小值点, 而不可导点 $x_3=1$ 不是极值点; $f(x)$ 在区间 $\left(-\infty,\dfrac{9}{7}\right]$ 和 $[3,+\infty)$ 上单调增加, 在区间 $\left[\dfrac{9}{7},3\right]$ 上单调减少. □

2. $f(x)=(x-1)^3x^2+4$.

解.

$$f'(x)=3(x-1)^2x^2+2x(x-1)^3=(x-1)^2[3x^2+2x(x-1)]=x(5x-2)(x-1)^2,$$

由 $f'(x)=0$ 得到 $f(x)$ 的驻点为 $x_1=0$, $x_2=\dfrac{2}{5}$, $x_3=1$.

在 $(-\infty,0)$ 内, $f'(x)>0$; 在 $\left(0,\dfrac{2}{5}\right)$ 内, $f'(x)<0$; 在 $\left(\dfrac{2}{5},1\right)$ 内, $f'(x)>0$; 在 $(1,+\infty)$ 内, $f'(x)>0$. 因此驻点 $x_1=0$ 为极大值点, 驻点 $x_2=\dfrac{2}{5}$ 为

极小值点, 驻点 $x_3 = 1$ 不是极值点; $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 和 $\left[\frac{2}{5}, +\infty\right)$ 上单调增加, 在区间 $\left[0, \frac{2}{5}\right]$ 上单调减少. □

二. 证明下列不等式:

1. $\frac{1-x}{1+x} < e^{-2x}$ $(0 < x < 1)$.

证明. 令 $f(x) = e^{2x}(1-x) - x - 1$, 则

$$f'(x) = 2e^{2x}(1-x) - e^{2x} - 1 = e^{2x}(1-2x) - 1,$$

$$f''(x) = 2e^{2x}(1-2x) - 2e^{2x} = -4xe^{2x},$$

在 $(0,1)$ 内 $f''(x) < 0$, 故 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调减少, 从而当 $0 < x < 1$ 时,

$$f'(x) < f'(0) = 1 - 1 = 0,$$

这说明 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调减少, 从而当 $0 < x < 1$ 时,

$$e^{2x}(1-x) - x - 1 = f(x) < f(0) = 1 - 1 - 1 = -1 < 0.$$

因此当 $0 < x < 1$ 时,

$$e^{2x}(1-x) < 1 + x,$$

两边同时除以 $e^{2x}(1+x)$ 即得

$$\frac{1-x}{1+x} < e^{-2x}.$$

□

2. $\sin x + \cos x > 1 + x - x^2$ $(x > 0)$.

证明. 令 $f(x) = \sin x + \cos x + x^2 - x - 1$, 则

$$f'(x) = \cos x - \sin x + 2x - 1,$$

$$f''(x) = -\sin x - \cos x + 2 = 2 - \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

由于 $f''(x) \geq 2 - \sqrt{2} > 0$, 故 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加, 从而当 $x > 0$ 时,

$$f'(x) > f'(0) = 1 - 1 = 0,$$

这说明 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加, 从而当 $x > 0$ 时,

$$\sin x + \cos x + x^2 - x - 1 = f(x) > f(0) = 0.$$

因此当 $x > 0$ 时,

$$\sin x + \cos x > 1 + x - x^2.$$

□

3. 证明: $f(x)$ 在 $[0, c]$ 有严格单调递减的导函数 $f'(x)$, $f(0) = 0$, 则 $0 < a < b < a + b < c$ 有 $f(a + b) < f(a) + f(b)$.

证明. 令 $g(x) = f(a + x) - f(x)$, 则当 $0 < x < b$ 时,

$$g'(x) = f'(a + x) - f'(x) < 0,$$

于是 $g(x)$ 在 $[0, b]$ 上单调减少. 因此

$$f(a + b) - f(b) = g(b) < g(0) = f(a) - f(0) = f(a),$$

即 $f(a + b) < f(a) + f(b)$. □

三. 讨论方程 $\ln x = ax (a > 0)$ 有几个实根.

解. 令 $f(x) = \ln x - ax$, 其定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $f'(x) = \dfrac{1}{x} - a$.

由 $f'(x) = 0$ 得到 $f(x)$ 的驻点为 $x = \dfrac{1}{a}$. 由 $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ 可知 $f''\left(\dfrac{1}{a}\right) = -a^2 < 0$, 故 $f(x)$ 在 $x = \dfrac{1}{a}$ 处取得极大值

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = \ln\frac{1}{a} - 1 = -1 - \ln a.$$

又由于
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty,$$
因此当 $f\left(\frac{1}{a}\right)=-1-\ln a<0$, 即 $a>\frac{1}{e}$ 时, 方程没有实根;
当 $f\left(\frac{1}{a}\right)=-1-\ln a=0$, 即 $a=\frac{1}{e}$ 时, 方程有一个实根 $x=\frac{1}{a}$;
当 $f\left(\frac{1}{a}\right)=-1-\ln a>0$, 即 $0<a<\frac{1}{e}$ 时, 方程有两个实根. □

四. $x>0$ **时方程** $ax+\frac{1}{x^2}=1$ **有且仅有一个根, 求** a **的取值范围.**

解. 令 $f(x)=ax+\frac{1}{x^2}-1$.

若 $a=0$, 则当 $x>0$ 时方程 $f(x)=0$ 有且仅有一个根 $x=1$.

若 $a<0$, 则当 $x>0$ 时 $f'(x)=a-\frac{2}{x^3}<0$, 即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少. 而 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, $f(1)=a<0$, 因此方程 $f(x)=0$ 有且仅有一个根.

若 $a>0$, 则由 $f'(x)=a-\frac{2}{x^3}=0$ 得到 $f(x)$ 的驻点为 $x_0=\sqrt[3]{\frac{2}{a}}$, 又由 $f''(x)=\frac{6}{x^4}$ 可知 $f''\left(\sqrt[3]{\frac{2}{a}}\right)>0$, 故 $x_0=\sqrt[3]{\frac{2}{a}}$ 为 $f(x)$ 的极小值点. 由于
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,$$
因此, 当 $f\left(\sqrt[3]{\frac{2}{a}}\right)>0$ 时方程 $f(x)=0$ 没有根,
当 $f\left(\sqrt[3]{\frac{2}{a}}\right)<0$ 时方程 $f(x)=0$ 有两个根,
当 $f\left(\sqrt[3]{\frac{2}{a}}\right)=0$, 即时方程 $f(x)=0$ 有且仅有一个根, 此时由 $f\left(\sqrt[3]{\frac{2}{a}}\right)=a\sqrt[3]{\frac{2}{a}}+\sqrt[3]{\frac{a^2}{4}}-1=0$ 解得 $a=\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

综上所述, 当 $a\le 0$ 或者 $a=\frac{2}{3\sqrt{3}}$ 时, 方程 $ax+\frac{1}{x^2}=1$ 在 $x>0$ 上有且仅有一个根. □

五. 求 $y=\dfrac{x-1}{x+4}$ 在 $[0,4]$ 上的最大值和最小值.

解. 当 $x\in(0,4)$ 时,

$$y'=\frac{(x+4)-(x-1)}{(x+4)^2}=\frac{5}{(x+4)^2}>0,$$

因此 $y=\dfrac{x-1}{x+4}$ 在 $[0,4]$ 上单调增加, 故最小值为 $y(0)=-\dfrac{1}{4}$, 最大值为 $y(4)=\dfrac{3}{8}$. □

六. 已知 $0\le x\le 1$, $p>1$, 证明: $2^{1-p}\le x^p+(1-x)^p\le 1$.

证明. 令 $f(x)=x^p+(1-x)^p$, 则 $f'(x)=px^{p-1}-p(1-x)^{p-1}$.

由 $f'(x)=0$ 得到驻点为 $x_0=\dfrac{1}{2}$. 由于 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2^{1-p}$, $f(0)=f(1)=1$, 故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值为 2^{1-p}, 最大值为 1, 因此当 $0\le x\le 1$ 时有

$$2^{1-p}\le x^p+(1-x)^p\le 1.$$

□

18 函数的单调性, 极值

一. 确定下列函数曲线的凹凸区间和拐点:

1. $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

解.
$$y' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2},$$
$$y'' = -\frac{2(1+x^2)^2 - 2x\cdot 4x(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}.$$
由 $y''=0$ 得到 $x_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
当 $x < -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时 $y''>0$, 当 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3} < x < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时 $y''<0$, 当 $x > \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时 $y''>0$, 因此 $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3}{4}\right)$ 和 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3}{4}\right)$ 都是该曲线的拐点, 且该曲线在 $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$ 上是凹的, 在 $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$ 上是凸的, 在 $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ 上是凹的. □

2. $y = xe^{-x}$.

解.
$$y' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x},$$
$$y'' = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}.$$
由 $y''=0$ 得到 $x_0 = 2$, 当 $x<2$ 时 $y''<0$, 当 $x>2$ 时 $y''>0$, 因此 $\left(2, \dfrac{2}{e^2}\right)$ 是该曲线的拐点, 且该曲线在 $(-\infty, 2]$ 上是凸的, 在 $[2, +\infty)$ 上是凹的. □

二. 求下列函数曲线的渐近线:

1. $y = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x-1}$.

解. 由
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x-1} = 0$$

可知 $y=0$ 为该曲线的水平渐近线.

由

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x-1}=-\infty,\ \lim_{x\to 1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x-1}=\infty$$

可知 $x=1$ 和 $x=0$ 为该曲线的垂直渐近线. □

2. $y=\dfrac{x^3}{(x-1)(2-x)}$.

解. 由

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3}{(x-1)(2-x)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3}{(x-1)(2-x)}=\infty$$

可知 $x=1$ 和 $x=2$ 为该曲线的垂直渐近线.

由

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x-1)(2-x)}=-1,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(x-1)(2-x)}+x=\lim_{x\to\infty}\frac{x(3x-2)}{(x-1)(2-x)}=-3$$

可知 $y=-x-3$ 为该曲线的斜渐近线. □

三. 作出函数 $y=\dfrac{x^3-2}{2(x-1)^2}$ 的图形.

解. 见讲义. □

四. 求 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 上任意点处的曲率.

解. 见讲义. □

附加题: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 证明: 对任意给定的正数 a 和 b, 在 $(0,1)$ 内存在不同的 ξ 和 η, 使 $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b$.

证明一. (1) 首先证明 Darboux 定理: 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导, $x_1,x_2\in(a,b)$. 如果 $f'(x_1)\cdot f'(x_2)<0$, 则在 x_1 和 x_2 之间至少存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi)=0$.

不妨设 $x_1 < x_2$ 且 $f'(x_1) > 0$, $f'(x_2) < 0$. 于是

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} > 0.$$

由极限的保号性,

$$\exists \delta > 0, \forall x \in \mathring{U}(x_1, \delta), \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} > 0.$$

取 $x_3 \in (x_1, x_1 + \delta)$, 则由 $x_3 - x_1 > 0$ 可知 $f(x_3) - f(x_1) > 0$.

同理, 可取 $x_4 \in (x_1, x_2)$ 使得 $f(x_4) - f(x_2) > 0$. 因此 x_1, x_2 都不是 $f(x)$ 的最大值点. 于是 $f(x)$ 在闭区间 $[x_1, x_2]$ 上的最大值点 $\xi \in (x_1, x_2)$, 由 Fermat 定理即知 $f'(\xi) = 0$. 定理得证.

(2) 其次证明导数的介值定理: 设 $f(x)$ 在 (a, b) 上可导, $x_1, x_2 \in (a, b)$. 对于 $f'(x_1)$ 和 $f'(x_2)$ 之间的任意实数 C, 在 x_1 和 x_2 之间至少存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi) = C$.

只需令 $F(x) = f(x) - Cx$, 则 $F'(x_1)F'(x_2) = (f'(x_1) - C)(f'(x_2) - C) < 0$. 由 Darboux 定理, 在 x_1 和 x_2 之间至少存在一点 ξ, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) = C$.

(3) 对任意给定的正数 a 和 b 以及任意满足 $0 < c < 1 < d$ 的正数 c 和 d, 下面证明存在 $A \in (c, 1)$, $B \in (1, d)$ 使得

$$Aa + Bb = a + b.$$

不妨设 $a < b$ 且 $1 - c > d - 1$, 其他情形可类似证明. 此时

$$c < 1 - \frac{b}{a}(d - 1) < 1.$$

取 $A \in \left(1 - \dfrac{b}{a}(d - 1), 1\right) \subset (c, 1)$, 令 $B = \dfrac{a + b - Aa}{b}$, 则

$$1 < B < d \text{ 且 } Aa + Bb = a + b.$$

(4) 下面证明原命题. 若 $f(x) = x$, 则 $f'(x) \equiv 1$, 于是

$$\forall \xi, \eta \in (0, 1), \frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a + b.$$

若 $\exists x_0 \in (0,1), f(x_0) \neq x_0$, 不妨设 $f(x_0) < x_0$, 则由 Lagrange 中值定理,

$$\exists x_1 \in (0, x_0) \subset (0,1), f'(x_1) = \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = \frac{f(x_0)}{x_0} < 1,$$

$$\exists x_2 \in (x_0, 1) \subset (0,1), f'(x_2) = \frac{f(1) - f(x_0)}{1 - x_0} = \frac{1 - f(x_0)}{1 - x_0} > 1.$$

根据导数的介值定理, 我们不妨设 $0 < f'(x_1) < 1$, $x_1 \in (0,1)$. 于是

$$0 < \frac{1}{f'(x_2)} < 1 < \frac{1}{f'(x_1)}.$$

对任意给定的正数 a 和 b, 取 $A, B > 0$ 使得

$$0 < \frac{1}{f'(x_2)} < A < 1 < B < \frac{1}{f'(x_1)}$$

且

$$Aa + Bb = a + b,$$

这样

$$f'(x_1) < \frac{1}{B} < \frac{1}{A} < f'(x_2).$$

又根据导数的介值定理,

$$\exists \xi, \eta \in (0,1), f'(\xi) = \frac{1}{A}, f'(\eta) = \frac{1}{B},$$

因此

$$\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = Aa + Bb = a + b.$$

□

证明二. 注意到

$$f(0) = 0 < \frac{a}{a+b} < 1 = f(1),$$

由连续函数的介值定理, 存在 $t \in (0,1)$ 使得 $f(t) = \dfrac{a}{a+b}$.

分别在 $[0,t]$ 和 $[t,1]$ 上对 $f(x)$ 应用 Lagrange 中值定理可知

$$\exists \xi \in (0,t), f'(\xi) = \frac{f(t) - f(0)}{t} = \frac{a}{(a+b)t},$$

$$\exists \eta \in (t, 1), f'(\eta) = \frac{f(1) - f(t)}{1 - t} = \frac{b}{(a+b)(1-t)}.$$

显然 $\xi \neq \eta$, 且

$$\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = (a+b)t + (a+b)(1-t) = a+b.$$

$\square$

19 单元检测

一. 填空:

1. $y=f(x)$ 的驻点是极值点的既不必要也不充分条件.

提示. 驻点是导数为 0 的点, 不一定是极值点; 极值点的定义与连续性或可导性无关. $\square$

2. $f(x)=x^3$ 在 $[1,2]$ 上满足 Lagrange 中值定理条件的 $\xi=\sqrt{\dfrac{7}{3}}$.

提示. 见习题册"微分中值定理"的第二大题. $\square$

3. $x=\dfrac{\pi}{9}$ 为 $f(x)=a\cos 3x+4\sin 3x$ 的极值点, 则它为极大值点.

提示. 由 $x=\dfrac{\pi}{9}$ 时 $f'(x)=12\cos 3x-3a\sin 3x=0$ 解出 $a=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$; 再由 $x=\dfrac{\pi}{9}$ 时 $f''(x)=-9a\cos 3x-36\sin 3x<0$ 可知它是极大值点. $\square$

4. $\dfrac{f'(\arctan 2x)}{1+4x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\Big[\dfrac{1}{2}f(\arctan 2x)\Big]$.

二. 选择:

1. $f(x)=x^2+2\ln x$ 上的凸曲线所对应的区间为 $(0,1)$.

提示. 注意 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, 计算可知 $f'(x)=2x+\dfrac{2}{x}$, $f''(x)=2-\dfrac{2}{x^2}$, 于是当 $x\in(0,1)$ 时 $f''(x)<0$. $\square$

2. $y=y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x=4-t^3-3t \\ y=2t^3-3t^2+7 \end{cases}$ 决定, 则 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 和 $[4,+\infty)$ 上单减.

提示. 由 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{6t^2-6t}{-3t^2-3}=-\dfrac{2t(t-1)}{t^2+1}$ 可知当 $t(t-1)>0$, 即 $t>1$ 或 $t<0$ 时 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}<0$. 由于 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-3(t^2+1)<0$, 即 $x(t)$ 单减. 因此 $t>1$ 意味着

$x < x(1) = 0$, $t < 0$ 意味着 $x > x(0) = 4$, 即 $y = y(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 和 $[4, +\infty)$ 上单减. $\square$

3. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)(x-2)}$ 有 3 条渐近线.

提示. 由 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} = \infty$ 可知 $x = 1$ 和 $x = 2$ 为垂直渐近线. 由 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - x] = 3$ 可知 $y = x + 3$ 为斜渐近线. $\square$

4. $y = f(x)$ 满足 $xf''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}$, 若 $f'(x_0) = 0$ $(x_0 \neq 0)$, 则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

提示. 由 $xf''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}$ 可知 $x_0 f''(x_0) = 1 - e^{-x_0}$;

由 $x_0 \neq 0$ 可知 $f''(x_0) = \dfrac{1 - e^{-x_0}}{x_0}$.

若 $x_0 > 0$, 则 $e^{-x_0} < 1$, 于是 $f''(x_0) > 0$; 若 $x_0 < 0$, 则 $e^{-x_0} > 1$, 这时也有 $f''(x_0) > 0$. 因此 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值. $\square$

5. 在 $(-\infty, +\infty)$ 内方程 $|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x = 0$ 有且仅有两个实根.

提示. 注意到 $F(x) = |x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x$ 是偶函数, 且 $F(0) \neq 0$, 故只需考虑

$$f(x) = x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{2}} - \cos x \ (x \geq 0).$$

当 $x \in (0, 1)$ 时,

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \sin x > 0,$$

故 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调增加, 由 $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 2 - \cos 1 > 0$ 可知 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有且仅有一个实根.

又由于当 $x > 1$ 时,

$$f(x) = x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{2}} - \cos x > 1 + 1 - 1 = 1 > 0,$$

因此 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且仅有一个实根, 从而 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有且仅有两个实根. $\square$

三. 计算下列各题:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$.

解.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x} &= \lim_{x\to 1}\frac{x-e^{x\ln x}}{1-x+\ln x}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1-e^{x\ln x}(1+\ln x)}{\dfrac{1}{x}-1}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{-e^{x\ln x}(1+\ln x)^2-e^{x\ln x}\cdot\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}\\ &= 2.\end{aligned}$$

□

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

解. 由于

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}x\ln\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right) &= \lim_{t\to 0}\frac{\ln(\sin t+\cos t)}{t}\quad\left(令\ t=\frac{1}{x}\right)\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}}{1}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\\ &= 1,\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})} = e.$$

□

四.

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$.

1. 求 a 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

解. 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则

$$a=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}(-xe^{-\frac{x^2}{2}}+\sin x)=0.$$

□

2. 求 $f'(x)$.

解. 当 $x\neq 0$ 时,

$$f'(x)=\frac{x(-xe^{-\frac{x^2}{2}}+\sin x)-(e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x)}{x^2}=\frac{x\sin x+\cos x-(x^2+1)e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2}.$$

由 $f(0)=a=0$ 得

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-xe^{-\frac{x^2}{2}}+\sin x}{2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}+\cos x}{2}=\frac{-1+1}{2}=0. \end{aligned}$$

因此

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\sin x+\cos x-(x^2+1)e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

□

3. $f'(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续?

解. 由

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f'(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+\cos x-(x^2+1)e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x+\sin x-\sin x+x(x^2+1)e^{-\frac{x^2}{2}}-2xe^{-\frac{x^2}{2}}}{2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x+(x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}}{2}\\ &= \frac{1-1}{2}=0=f'(0)\end{aligned}$$

可知 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续. □

五. $f(x)=e^x$**,** $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\theta x)$ **中** θ **为** $f(x)$ **在** $[0,x]$ **上满足 Lagrange 中值定理的** θ**, 求** $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta$**.**

解. 由 $\dfrac{e^x-1}{x}=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\theta x)=e^{\theta x}$ 得

$$\theta=\frac{\ln\frac{e^x-1}{x}}{x}=\frac{\ln(e^x-1)-\ln x}{x},$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\theta &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(e^x-1)-\ln x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{xe^x-e^x+1}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{xe^x+e^x-e^x}{xe^x+e^x-1}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{xe^x}{xe^x+e^x-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{xe^x+e^x}{xe^x+2e^x}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

六. $f(x)$ **在** $[0,1]$ **上二阶可导,** $f(0)=0$**, 且** $f'(x)\neq 0$**,** $\dfrac{f''(x)}{f'(x)}\neq\dfrac{2}{1-x}$**. 试证明: 方程** $\dfrac{f(x)}{f'(x)}=1-x$ **在** $(0,1)$ **内有且仅有一个根.**

证明. 令 $g(x)=(x-1)f(x)$, 则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $g(0)=g(1)=0$. 由 Rolle 定理,

$$\exists\xi\in(0,1), g'(\xi)=f(\xi)+(\xi-1)f'(\xi)=0,$$

这说明方程 $\dfrac{f(x)}{f'(x)}=1-x$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个根.

假设方程 $\dfrac{f(x)}{f'(x)}=1-x$ 在 $(0,1)$ 内有两个根 α,β, 不妨设 $\alpha<\beta$, 则 $g'(\alpha)=g'(\beta)=0$. 由 Rolle 定理,

$$\exists\eta\in(\alpha,\beta)\subset(0,1), g''(\eta)=2f'(\eta)+(\eta-1)f''(\eta)=0,$$

这与在 $[0,1]$ 上 $\dfrac{f''(x)}{f'(x)}\neq\dfrac{2}{1-x}$ 矛盾, 唯一性得证. □

七. **设** $f(0)=0$**,** $f'(0)=1$ **且** $f'(x)$ **在** $[0,+\infty)$ **内单增. 试证明:** $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ **在** $(0,+\infty)$ **内单调增加, 且** $f(x)>x$**.**

证明. 对任意 $x\in(0,+\infty)$, 由 Lagrange 中值定理,

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{f'(x)-\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}}{x}=\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x},\quad \xi\in(0,x)$$

于是由 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调增加就得到 $g'(x)>0$, 故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

设 $h(x)=f(x)-x$, 则当 $x>0$ 时, $h'(x)=f'(x)-1=f'(x)-f'(0)>0$, 故 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调增加. 因此当 $x>0$ 时, $f(x)-x=h(x)>h(0)=f(0)-0=0$, 即 $f(x)>x$. □

八. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的内接等腰梯形的一条底边在椭圆的长轴上. 问: 此梯形的另外两个顶点位于椭圆上何处时, 它能有最大的面积?

解. 设此梯形的另外两个顶点为 $(a\cos t, b\sin t)$ 和 $(-a\cos t, b\sin t)$, 不妨设 $t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则梯形的面积

$$s(t)=\frac{1}{2}(2a\cos t+2a)\cdot b\sin t=ab(\cos t+1)\sin t.$$

由

$$\begin{aligned} s'(t) &= ab[(\cos t+1)\cos t-\sin^2 t]=ab(\cos t+\cos^2 t-\sin^2 t) \\ &= ab(\cos t+\cos 2t)=ab\cos\frac{3t}{2}\cos\frac{t}{2}=0 \end{aligned}$$

解得 $t=\dfrac{\pi}{3}$, 又由

$$s''(t)=ab(-\sin t-2\sin 2t)$$

可知 $s''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)<0$, 因此当 $t=\dfrac{\pi}{3}$, 即梯形的另外两个顶点为 $\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{b\sqrt{3}}{2}\right)$ 和 $\left(-\dfrac{a}{2},\dfrac{b\sqrt{3}}{2}\right)$ 时梯形有最大面积

$$s\left(\frac{\pi}{3}\right)=ab\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}ab}{4}.$$

同理可得, 当梯形的另外两个顶点为 $\left(\dfrac{a}{2},-\dfrac{b\sqrt{3}}{2}\right)$ 和 $\left(-\dfrac{a}{2},-\dfrac{b\sqrt{3}}{2}\right)$ 时梯形也有最大面积. □

20 2011-2012年第一学期期中考试

一. 填空题

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x\ln 2)^{\frac{1}{x}}=2.$
(《极限存在准则 两个重要极限》第九大题)

提示. 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x\ln 2)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln 2}{x}=\ln 2$ 得

$$\lim_{x\to 0}(1+x\ln 2)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x\ln 2)}{x}}=e^{\ln 2}=2.$$

□

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的导数 $f'(2)=2$, 则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h+2)-f(2-h)}{h}=4.$
(《导数概念》第四大题 2 小题)

提示.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(2+h)-f(2)]-[f(2-h)-f(2)]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}\\ &= f'(2)-(-f'(2))=2f'(2).\end{aligned}$$

□

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{-x^2}, & x\neq 0\\ \ln m, & x=0\end{cases}$ $(m>0)$ 在 $x=0$ 连续, 则 $m=e.$

提示. 由

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{-x^2}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(-x^2)\ln(\cos x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(-x^2)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\ln(\cos x)}=e^0=1$$

得 $\ln m=1$, 从而 $m=e$. □

4. 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\dots(x-2011)$, 则 $f'(0)=-2011!.$
(《导数概念》第十大题)

提示.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-2011)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}[(x-1)(x-2)\dots(x-2011)] \\ &= (-1)(-2)\dots(-2011) \\ &= -2011!. \end{aligned}$$

□

5. 函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$ 的水平渐近线为 $y=1$.

提示. 由

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = 1$$

即知水平渐近线为 $y=1$. □

二. 选择题

1. 下列命题中, 正确的是哪一个?

提示. (A) $f(x)=x\sin x$ 不是周期函数. 假设 $f(x+T)=f(x)$, 则 $T\sin T=f(T)=f(0)=0$, 于是 $T=k\pi, k\in\mathbb{Z}$. 从而 $(x+k\pi)\sin(x+k\pi)=x\sin x$, 这说明 $\forall x\in\mathbb{R}, x+k\pi=\pm x$, 这是不可能的.

(B) Dirichlet 函数是周期函数, 但没有最小正周期. (教材第一章第一节例10)

(C) 周期函数的导数仍为周期函数. (《求导法则 (1) 导数的四则运算》第二大题 3 小题》)

(D) 奇函数的导数为偶函数. (《求导法则 (1) 导数的四则运算》第二大题 2 小题》)

□

2. 当 $x \to 0$ 时, $x \sin \sqrt{x}$ 是 x 的 $\dfrac{3}{2}$ 阶无穷小量.

提示. 当 $x \to 0$ 时, $x \sin \sqrt{x} \sim x \cdot \sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$. □

3. 设函数 $f(x) = \dfrac{[x] \sin \frac{1}{x}}{1 + \sin x}$, 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的振荡间断点.

提示. 当 $-1 \le x < 0$ 时, $[x] = -1$. 因此当 $x \to 0^-$ 时, $f(x) = \dfrac{-\sin \frac{1}{x}}{1 + \sin x}$ 在 -1 和 1 之间变动无穷多次. □

4. 下列论断中正确的有几个?

提示. (1) 当 $x \to \infty$ 时考虑 $f(x) \equiv 0$ 和 $g(x) = x$ 即知有界函数与无穷大的乘积不一定是无穷大. (《无穷小与无穷大》第四大题 4 小题》)

(2) 设 $f(x) \neq 0$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义且有间断点, 则 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 必有间断点. 这是因为, 如果 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 则 $g(x) = f(x) \cdot \dfrac{g(x)}{f(x)}$ 也在 $\mathbb{R}$ 上连续, 矛盾.

(3) 若函数在某点 $x = a$ 处不可导, 则函数在该点处不可微, 但仍有可能存在切线 (即导数可能为无穷大, 相应的切线就是 $x = a$). 例如, 考虑上半圆周 $y = \sqrt{1 - x^2}$, 在 $x = 1$ 处导数为无穷大, 但在 $x = 1$ 处有切线 $x = 1$.

(4) 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 的某个邻域内有定义且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=A$ (A 为有限数), 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可能不可导. 例如, 考虑 $f(x)=|x-1|$, 则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|-|h|}{2h}=0,$$

但显然 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导.

□

5. 首先,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot\frac{1}{2}x(1+\sqrt{\cos x})}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(上面是《无穷小的比较》第三大题 3 小题》)

其次, 由

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\frac{x^3}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}\cdot\frac{\tan x}{x}=1$$

可知当 $x\to 0$ 时, $\tan x-\sin x\sim\dfrac{x^3}{2}$.
(上面是《无穷小的比较》第二大题 2 小题》)

又利用 $x\to 0$ 时的等价无穷小 $(1+x)^a-1\sim ax$ 和 $x\sim\arcsin x$ 可知

$$\sqrt[3]{1+\arcsin^2 x}-1\sim\frac{1}{3}\arcsin^2 x\sim\frac{1}{3}x^2,$$

故

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1+\tan x}}{3x(\sqrt[3]{1+\arcsin^2 x}-1)} &= \lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1+\tan x}}{x^3}\\
&= \lim_{x\to0^+}\frac{(1+\sin x)-(1+\tan x)}{x^3(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1+\tan x})}\\
&= \lim_{x\to0^+}\frac{\sin x-\tan x}{x^3(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1+\tan x})}\\
&= \lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{x^3}{2}}{x^3(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1+\tan x})}\\
&= -\frac{1}{4},
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1+\tan x})(1-\sqrt{\cos x})}{3(x^2\sqrt[3]{1+\arcsin^2 x}-x^2)(1-\cos\sqrt{x})}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{8}.$$

三. 计算题

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

解. (1) 首先证明如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

当 $a=0$ 时, $\forall\epsilon>0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 可知

$$\exists N_1\in\mathbb{N}^+,\forall n>N_1,|a_n|<\frac{\epsilon}{2}.$$

现在 $a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}$ 已经固定, 于是可以取 $N>N_1$, 使得

$$\forall n>N,\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}\right|<\frac{\epsilon}{2}.$$

这样, $\forall n > N$, 我们有

$$\begin{aligned}
& \left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right| \\
= & \left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}+\frac{a_{N_1+1}+a_{N_2+2}+\cdots+a_n}{n}\right| \\
\leq & \left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}\right|+\left|\frac{a_{N_1+1}+a_{N_2+2}+\cdots+a_n}{n}\right| \\
< & \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.
\end{aligned}$$

于是根据极限的定义就得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0.$$

当 $a \neq 0$ 时, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$, 于是同理可得

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right) \\
= & \lim_{n\to\infty}\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_n-a)}{n} \\
= & 0,
\end{aligned}$$

此即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$$

(2) 其次证明若 $a_n > 0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=a$.
当 $a > 0$ 时, 由平均值不等式, $\forall n \in \mathbb{N}^+$,

$$\begin{aligned}
\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}} & \leq \frac{n}{n\sqrt[n]{\dfrac{1}{a_1a_2\ldots a_n}}} \\
& = \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \\
& \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.
\end{aligned}$$

由 (1) 得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$$

且
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a},$$
从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=a$, 再由极限的夹逼性就得到
$$\lim_{n\to\infty}=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=a.$$

当 $a=0$ 时, 显然有
$$a=0<\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$
同样可由极限的夹逼性得到该结论.

(3) 令 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=e$ 且 $\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=\dfrac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}$.

因此由 (2) 得
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=1\cdot e=e.$$

□

2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{2n}\right)^n\cdot\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$.
(同类型的题见《极限存在准则, 两个重要极限》第八大题)

解. 由
$$\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\frac{a}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{a}{2n}=\frac{a}{2}$$
可知
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{2n}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln(1+\frac{a}{2n})}=e^{\frac{a}{2}}.$$
又由
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}=0$$

可知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{1+\tan\dfrac{1}{n}}{1-\tan\dfrac{1}{n}}\right) &= \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{2\tan\dfrac{1}{n}}{1-\tan\dfrac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{2\tan\dfrac{1}{n}}{1-\tan\dfrac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{2\cdot\dfrac{1}{n}}{1-\tan\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1-\tan\dfrac{1}{n}} = 2,\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\tan\dfrac{1}{n}}{1-\tan\dfrac{1}{n}}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{1+\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}\right)} = e^2,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{2n}\right)^n\cdot\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{a}{2}+2}.$$

□

3. 设 $y=(1+x)\cdot\sqrt{2+x^2}\cdot\sqrt[3]{3+x^3}$, 求 $\mathrm{d}y$.

解.

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{2+x^2}\cdot\sqrt[3]{3+x^3}+(1+x)\cdot\frac{2x}{2\sqrt{2+x^2}}\cdot\sqrt[3]{3+x^3}+(1+x)\cdot\sqrt{2+x^2}\cdot\frac{3x^2}{3\sqrt[3]{(3+x^3)^2}} \\ &= \sqrt{2+x^2}\cdot\sqrt[3]{3+x^3}+(1+x)\cdot\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\cdot\sqrt[3]{3+x^3}+(1+x)\cdot\sqrt{2+x^2}\cdot\frac{x^2}{\sqrt[3]{(3+x^3)^2}},\end{aligned}$$

故

$$\mathrm{d}y = \left(\sqrt{2+x^2}\cdot\sqrt[3]{3+x^3}+(1+x)\cdot\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\cdot\sqrt[3]{3+x^3}+(1+x)\cdot\sqrt{2+x^2}\cdot\frac{x^2}{\sqrt[3]{(3+x^3)^2}}\right)\mathrm{d}x.$$

□

4. 设 $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t\end{cases}$, $0\le t\le 2\pi$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=\pi}$.

(教材第二章第四节例 9)

解. 首先,
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\cot\frac{t}{2}\ \ (0<t<2\pi).$$
于是
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\cot\frac{t}{2}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\cot\frac{t}{2}\right)\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\\&=-\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{1-\cos t}=-\frac{1}{(1-\cos t)^2}\end{aligned}$$
因此
$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\pi}=-\left.\frac{1}{(1-\cos t)^2}\right|_{t=\pi}=-\frac{1}{4}.$$
□

四. 解答题

1. 确定 a,b 的值, 使得 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$.
(《极限运算法则》第三大题)

解. 由
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x-(b-1)}{x+1}=0$$
可知
$$\begin{cases}1-a=0,\\-(a+b)=0.\end{cases}$$
因此 $a=1,b=-1$. □

2. 确定 a,b 的值, 使 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}(1-\cos ax), & x<0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{1}{x}\ln(b+x^2), & x>0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处可导.

(讨论 $x=0$ 处的可导性的方法与《导数概念》第七、八大题相同)

解. 要使 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 则必有 $b>0$. 此时 $f(x)$ 在 $x\neq 0$ 处为初等函数, 故一定可导. 下面只需考虑 $x=0$ 处的可导性.

首先, 要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $f(0^-)=f(0^+)=f(0)=0$. 而

$$\begin{aligned} f(0^-) &= \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}(1-\cos ax)\\ &= \lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{2}(ax)^2}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^-}a^2x=0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0^+) &= \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln(b+x^2)\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left[\ln b+\ln\left(1+\frac{x^2}{b}\right)\right]\\ &= \begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\cdot x^2=\lim_{x\to 0^+}=0, & b=1,\\ \infty, & b\neq 1,\end{cases} \end{aligned}$$

故 $b=1$.

其次, 要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连可导, 则 $f'_-(0)=f'_+(0)$. 而

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos ax}{x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{2}(ax)^2}{x^2}=\frac{1}{2}a^2,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x^2}=1,$$

故 $\dfrac{1}{2}a^2=1$, 因此 $a=\pm\sqrt{2}$. $\square$

3. 溶液自深为 18 cm, 上顶直径为 12 cm 的正圆锥形漏斗中漏入一直径为 10 cm 的圆柱形筒中. 开始时漏斗中盛满了溶液. 已知当溶液在漏斗中深为 12 cm 时, 其表面下降的速率为 1 cm/min. 问此时圆柱形筒中溶液表面上升的速率为多少?

解. 设 t min 后漏斗中的水深为 H cm, 水面半径为 r cm, 圆柱形筒中的水深为 h cm, 则

$$\frac{1}{3}\pi\cdot 6^2\cdot 18-\frac{1}{3}\pi r^2 H=\pi\cdot 5^2\cdot h.$$

由于 $\dfrac{r}{6}=\dfrac{H}{18}$, 即 $r=\dfrac{H}{3}$, 故

$$\frac{1}{3}\pi\cdot 6^2\cdot 18-\frac{1}{3}\pi\Big(\frac{H}{3}\Big)^2 H=\pi\cdot 5^2\cdot h,$$

即

$$216\pi-\frac{\pi H^3}{27}=25\pi h.$$

在上式两端对 t 求导得

$$-\frac{1}{9}\pi H^2\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=25\pi\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}.$$

当 $H=12$ 时, $\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=-1$, 此时

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{25\pi}\Big(-\frac{1}{9}\pi H^2\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\Big)=\frac{16}{25}(\mathrm{cm/min}).$$

□

五. 证明题

1. 证明方程 $x^3+px+q=0$ $(p>0)$ 有且仅有唯一实根.

证明. 令 $f(x)=x^3+px+q$, 由 $f'(x)=3x^2+p>0$ 可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内严格单调增加. 又注意到

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,$$

根据零点定理可知方程 $x^3+px+q=0$ 有且仅有唯一实根. □

2. 设 $x_1=1$, $x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}\ (n=1,2,3,\ldots)$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(《极限存在准则, 两个重要极限》第五、六大题)

证明. 注意到 $x_1=1>0$, 假设 $x_n>0$, 则 $x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}>0$, 由数学归纳法得 $\forall n\in\mathbb{N}^+, x_n>0$.

又注意到当 $x_n>\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时,

$$x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}<\frac{1}{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

而当 $x_n<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时,

$$x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}>\frac{1}{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

于是由 $x_1=1>\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 可知

$$x_2<\frac{\sqrt{5}-1}{2}, x_3>\frac{\sqrt{5}-1}{2}, x_4<\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ldots,$$

即

$$\forall n\in\mathbb{N}^+, x_{2n-1}>\frac{\sqrt{5}-1}{2}, x_{2n}<\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \tag{1}$$

又由

$$x_{n+2}=\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x_n}}=\frac{1+x_n}{2+x_n}$$

可得

$$x_{n+2}-x_n=\frac{1+x_n}{2+x_n}-x_n=\frac{1-x_n-x_n^2}{2+x_n}=\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}+x_n\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}-x_n\right)}{2+x_n},$$

于是 $x_{n+2} < x_n$ 当且仅当 $x_n > \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $x_{n+2} > x_n$ 当且仅当 $x_n < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. 故由 (1) 式可知 $\{x_n\}$ 的子数列 $\{x_{2n-1}\}$ 单调减少, 而 $\{x_{2n}\}$ 单调增加, 并且满足

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, x_2 < x_4 < \cdots < x_{2n} < \frac{\sqrt{5}-1}{2} < x_{2n+1} < x_{2n-1} < \cdots < x_1.$$

这样 $\{x_{2n-1}\}$ 单调减少且有下界, $\{x_{2n}\}$ 单调增加且有上界, 由单调有界数列收敛定理, 它们分别收敛. 设

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = a, \quad \lim_{n\to\infty} x_{2n} = b,$$

则由 $x_{2n} = \dfrac{1}{1+x_{2n-1}}$ 以及 $x_{2n+1} = \dfrac{1}{1+x_{2n}}$ 可知

$$a = \frac{1}{1+b}, \quad b = \frac{1}{1+a},$$

于是

$$a = \frac{1}{1+b} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+a}} = \frac{1+a}{2+a},$$

即

$$a^2 + a - 1 = 0,$$

解得 $a = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. 由于 $x_n > 0$, 舍去负值, 得到 $a = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, 于是

$$b = \frac{1}{1+a} = \frac{1}{1+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = a.$$

这说明

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} x_{2n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

因此数列 $\{x_n\}$ 收敛, 其极限为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

□

21 不定积分的概念和性质

一. 填空题:

1. 已知 $\int x^3 f(x)\mathrm{d}x = x + \frac{1}{x} + C$, 则 $\int f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4x^4} + C$.

提示. 由 $x^3 f(x) = \left(x + \frac{1}{x} + C\right)' = 1 - \frac{1}{x^2}$ 可知 $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^5}$, 因此

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^5}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4x^4} + C.$$

□

2. $f(x)$ 满足 $f'(x)(1+x^2) = x^2$, 则 $f(x) = x - \arctan x + C$.

提示.

$$f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = x - \arctan x + C.$$

□

二. 计算下列不定积分:

1. $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解.

$$\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int \left(x^{\frac{3}{4}} - x^{-\frac{5}{4}}\right)\mathrm{d}x = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}} + C.$$

□

2. $\int \frac{1+2x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解.

$$\int \frac{1+2x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \left(2 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = 2x - \arctan x + C.$$

□

3. $\displaystyle\int x^4(1+x^2)^3\mathrm{d}x.$

解.

$$\int x^4(1+x^2)^3\mathrm{d}x=\int(x^4+3x^6+3x^8+x^{10})\mathrm{d}x=\frac{1}{5}x^5+\frac{3}{7}x^7+\frac{1}{3}x^9+\frac{1}{11}x^{11}+C.$$

□

4. $\displaystyle\int(e^x-1)^2 2x\mathrm{d}x.$

解.

$$\begin{aligned}\int(e^x-1)^2 2^x\mathrm{d}x &= \int(e^{2x}-2e^x+1)2^x\mathrm{d}x\\ &= \int[(2e^2)^x-2(2e)^x+2^x]\mathrm{d}x\\ &= \frac{(2e^2)^x}{\ln(2e^2)}-\frac{2(2e)^x}{\ln(2e)}+\frac{2^x}{\ln 2}+C\\ &= \frac{2^x e^{2x}}{2+\ln 2}-\frac{2^{x+1}e^x}{1+\ln 2}+\frac{2^x}{\ln 2}+C.\end{aligned}$$

□

5. $\displaystyle\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x.$

解.

$$\begin{aligned}\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x &= \int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x\\ &= \int(\cos x+\sin x)\mathrm{d}x\\ &= \sin x-\cos x+C.\end{aligned}$$

□

三. 证明: $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$.

证明.

$$[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]' = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$\square$

四. 一质点从直角坐标系 xOy 的原点出发, t 时刻的速率为 $8+2t-\frac{t^2}{2}$, 运动方向与 x 轴成 $30°$, 求 $t=2$ 时质点的位移.

解. 设质点在时刻 t 的速度为 v, 位移为 s, 则

$$v(t) = 8+2t-\frac{t^2}{2},$$

$$s(t) = \int v(t)\mathrm{d}t = \int \left(8+2t-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t = 8t+t^2-\frac{t^3}{6}+C.$$

由 $s(0)=0$ 得 $C=0$, 因此

$$s(t) = 8t+t^2-\frac{t^3}{6},$$

$t=2$ 时质点的位移为

$$s(2) = 8\cdot 2+2^2-\frac{2^3}{6} = \frac{56}{3},$$

其方向与 x 轴成 $30°$. $\square$

22 换元积分法

一. 填空题:

1. 已知 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$, 则 $\int x^2 f(x^3)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}F(x^3)+C$.

提示.

$$\int x^2 f(x^3)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int f(x^3)\mathrm{d}(x^3) = \frac{1}{3}F(x^3)+C.$$

□

2. $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, 则$\int \frac{f(x)}{1+4F^2(x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arctan[2F(x)]+C$.

提示.

$$\int \frac{f(x)}{1+4F^2(x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}[2F(x)]}{1+[2F(x)]^2} = \frac{1}{2}\arctan[2F(x)]+C.$$

□

3. $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, $f(x) = \frac{F(x)}{1+x^2}$, 则 $f(x) = \frac{Ce^{\arctan x}}{1+x^2}$.

提示. 当 $F(x)\neq 0$ 时,

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}[F(x)]}{F(x)} = \ln|F(x)|+C_1,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C_2,$$

于是由 $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{1}{1+x^2}$ 可知

$$\ln|F(x)| = \arctan x + C_0,$$

$$|F(x)| = e^{\arctan x + C_0} = e^{C_0}e^{\arctan x},$$

当 $F(x)>0$ 时取 $C=e^{C_0}$, 当 $F(x)<0$ 时取 $C=-e^{C_0}$, 就得到

$$F(x) = Ce^{\arctan x}.$$

注意到 $F(x)=0$ 也满足题设, 故上面的 C 可以是任意常数. 此时

$$f(x) = F'(x) = \frac{Ce^{\arctan x}}{1+x^2}.$$

□

二. 计算下列不定积分:

1. $\displaystyle\int \frac{6x-5}{\sqrt{3x^2-5x+7}}\mathrm{d}x.$

解.

$$\int \frac{6x-5}{\sqrt{3x^2-5x+7}}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(3x^2-5x+7)}{\sqrt{3x^2-5x+7}} = 2\sqrt{3x^2-5x+7}+C.$$

□

2. $\displaystyle\int \frac{\cot x}{\ln\sin x}\mathrm{d}x.$

解.

$$\int \frac{\cot x}{\ln\sin x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\ln\sin x)}{\ln\sin x} = \ln|\ln\sin x|+C.$$

□

3. $\displaystyle\int \frac{x^3}{9+x^2}\mathrm{d}x.$

解.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{9+x^2}\mathrm{d}x &= \int \left(x-\frac{9x}{9+x^2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int x\mathrm{d}x - \frac{9}{2}\int \frac{\mathrm{d}(9+x^2)}{9+x^2}\\ &= \frac{x^2}{2}-\frac{9}{2}\ln(9+x^2)+C.\end{aligned}$$

□

4. $\displaystyle\int \cos^2(3x+4)\mathrm{d}x.$

解.

$$\begin{aligned}\int \cos^2(3x+4)\mathrm{d}x &= \int \frac{1+\cos(6x+8)}{2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x + \frac{1}{12}\int \cos(6x+8)\mathrm{d}(6x+8)\\ &= \frac{x}{2}+\frac{\sin(6x+8)}{12}+C.\end{aligned}$$

□

5. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^2}\mathrm{d}x.$

解.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^2}\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}(\arccos x)}{(\arccos x)^2} = \frac{1}{\arccos x} + C.$$

□

6. $\displaystyle\int \frac{e^x+7}{4e^x-1}\mathrm{d}x.$

解.

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^x+7}{4e^x-1}\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{29}{4}\cdot\frac{1}{4e^x-1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int \mathrm{d}x + \frac{29}{4}\int \frac{e^{-x}}{4-e^{-x}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{4} + \frac{29}{4}\int \frac{\mathrm{d}(4-e^{-x})}{4-e^{-x}} \\
&= \frac{x}{4} + \frac{29}{4}\ln|4-e^{-x}| + C.
\end{aligned}$$

□

7. $\displaystyle\int \frac{1+\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$

解.

$$\int \frac{1+\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} + 2\int \sin\sqrt{x}\mathrm{d}(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} - 2\cos\sqrt{x} + C.$$

□

8. $\displaystyle\int (x^3+x)\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x.$

解.

$$\int (x^3+x)\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}(1+x^2) = \frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{5}{2}} + C.$$

□

9. $\int \frac{1}{\sin 2x}\mathrm{d}x.$

解法一.

$$\int \frac{1}{\sin 2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \csc 2x \mathrm{d}(2x) = \frac{1}{2}\ln|\csc 2x - \cot 2x| + C.$$

□

解法二.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin 2x}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin x\cos x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\tan x} = \frac{1}{2}\ln|\tan x| + C.\end{aligned}$$

□

三. 计算下列不定积分:

1. $\int x^2(1-x)^{20}\mathrm{d}x.$

解. 令 $x = t+1$, 则 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, 因此

$$\begin{aligned}\int x^2(1-x)^{20}\mathrm{d}x &= \int t^{20}(t+1)^2\mathrm{d}t \\ &= \int (t^{20} + 2t^{21} + t^{22})\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{21}t^{21} + \frac{1}{11}t^{22} + \frac{1}{23}t^{23} + C \\ &= \frac{1}{21}(x-1)^{21} + \frac{1}{11}(x-1)^{22} + \frac{1}{23}(x-1)^{23} + C.\end{aligned}$$

□

2. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x.$

解. 令 $x = t^6$ $(t > 0)$, 则 $t = \sqrt[6]{x}$, $\mathrm{d}x = 6t^5\mathrm{d}t$, 因此

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x &= \int \frac{t^3}{1+t^2}\cdot 6t^5\mathrm{d}t \\ &= 6\int \frac{t^8+t^6-t^6-t^4+t^4+t^2-t^2-1+1}{1+t^2}\mathrm{d}t \\ &= 6\int \Big(t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\Big)\mathrm{d}t \\ &= 6\Big(\frac{1}{7}t^7-\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3-t+\arctan t\Big)+C \\ &= 6\Big(\frac{1}{7}x^{\frac{7}{6}}-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{6}}+\frac{1}{3}\sqrt{x}-\sqrt[6]{x}+\arctan\sqrt[6]{x}\Big)+C.\end{aligned}$$

□

3. $\displaystyle\int \sqrt{1+e^x}\mathrm{d}x.$

解. 令 $t = \sqrt{1+e^x}$, 则 $t > 1$, 且

$$x = \ln(t^2-1),\ \mathrm{d}x = \frac{2t}{t^2-1}\mathrm{d}t.$$

因此

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+e^x}\mathrm{d}x &= \int \frac{2t^2}{t^2-1}\mathrm{d}t \\ &= \int \Big(2+\frac{2}{t^2-1}\Big)\mathrm{d}t \\ &= 2t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C \\ &= 2t+2\ln(t-1)-\ln(t^2-1)+C \\ &= 2\sqrt{1+e^x}+2\ln(\sqrt{1+e^x}-1)-x+C.\end{aligned}$$

□

4. $\displaystyle\int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.$

解. 令 $x=\sin t,\ -\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$, 则

$$\tan t=\frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ \mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t.$$

因此

$$\int\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos t}{\cos^3 t}\mathrm{d}t=\int\sec^2 t\mathrm{d}t=\tan t+C=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C.$$

□

5. $\displaystyle\int\frac{1}{(4+x^2)^2}\mathrm{d}x.$

解. 令 $x=2\tan t,\ -\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$, 则

$$t=\arctan\frac{x}{2},\ \sin 2t=\frac{2\tan t}{1+\tan^2 t}=\frac{4x}{4+x^2},\ \mathrm{d}x=2\sec^2 t\mathrm{d}t.$$

因此

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(4+x^2)^2}\mathrm{d}x &= \int\frac{2\sec^2 t}{(4\sec^2 t)^2}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{8}\int\cos^2 t\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{16}\int(1+\cos 2t)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{16}\left[\int\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int\cos 2t\mathrm{d}(2t)\right]\\ &= \frac{1}{16}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C\\ &= \frac{1}{16}\left(\arctan\frac{x}{2}+\frac{2x}{4+x^2}\right)+C.\end{aligned}$$

□

23　分部积分法

一.　计算下列不定积分:

1. $\displaystyle\int x^2\arcsin x\mathrm{d}x.$

解.

$$
\begin{aligned}
\int x^2\arcsin x\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}x^3\arcsin x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{3}x^3\arcsin x+\frac{1}{3}\int\frac{x(1-x^2)-x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{3}x^3\arcsin x+\frac{1}{3}\int\left(x\sqrt{1-x^2}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{3}x^3\arcsin x-\frac{1}{6}\int\left(\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}(1-x^2)\\
&= \frac{1}{3}x^3\arcsin x-\frac{1}{9}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}+C\\
&= \frac{1}{3}x^3\arcsin x+\frac{1}{9}(x^2+2)\sqrt{1-x^2}+C.
\end{aligned}
$$

□

2. $\displaystyle\int\frac{x}{e^{3x}}\mathrm{d}x.$

解.

$$
\begin{aligned}
\int\frac{x}{e^{3x}}\mathrm{d}x &= \int xe^{-3x}\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{3}xe^{-3x}+\frac{1}{3}\int e^{-3x}\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{3}xe^{-3x}-\frac{1}{9}\int e^{-3x}\mathrm{d}(-3x)\\
&= -\frac{1}{3}xe^{-3x}-\frac{1}{9}e^{-3x}+C\\
&= -\frac{3x+1}{9e^{3x}}+C.
\end{aligned}
$$

□

3. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{(1-x)^2}\mathrm{d}x.$

解.

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{(1-x)^2}\mathrm{d}x &= \frac{\ln x}{1-x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x(1-x)} \\ &= \frac{\ln x}{1-x} + \Big(\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x}\Big) \\ &= \frac{\ln x}{1-x} + \ln|x-1| - \ln|x| + C \\ &= \frac{\ln x}{1-x} + \ln\left|1-\frac{1}{x}\right| + C.\end{aligned}$$

□

4. $\displaystyle\int \frac{x\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$

解.

$$\begin{aligned}\int \frac{x\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x &= -\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x + \int \sqrt{1-x^2}\cdot 2\arcsin x \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x + 2\int \arcsin x\mathrm{d}x \\ &= -\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x + 2\Big(x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\Big) \\ &= -\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x + 2x\arcsin x + \int \frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x + 2x\arcsin x + 2\sqrt{1-x^2} + C.\end{aligned}$$

□

5. $\displaystyle\int \frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x.$

解.

$$\begin{aligned}\int\frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x &= \int\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x\\ &= \int x\sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}\Big(\frac{x}{2}\Big)\\ &= x\tan\frac{x}{2}-\int\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x\\ &= x\tan\frac{x}{2}-2\int\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}\Big(\frac{x}{2}\Big)\\ &= x\tan\frac{x}{2}+2\ln\Big|\cos\frac{x}{2}\Big|+C.\end{aligned}$$

□

6. $\int e^{3x}\sin^2 x\mathrm{d}x.$

解. 首先, 由

$$\begin{aligned}\int e^{3x}\cos 2x\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x+\frac{2}{3}\int e^{3x}\sin 2x\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x+\frac{2}{3}\Big(\frac{1}{3}e^{3x}\sin 2x-\frac{2}{3}\int e^{3x}\cos 2x\mathrm{d}x\Big)\\ &= \frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x+\frac{2}{9}e^{3x}\sin 2x-\frac{4}{9}\int e^{3x}\cos 2x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

可知

$$\begin{aligned}\int e^{3x}\cos 2x\mathrm{d}x &= \frac{9}{13}\Big(\frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x+\frac{2}{9}e^{3x}\sin 2x\Big)+C\\ &= e^{3x}\Big(\frac{3}{13}\cos 2x+\frac{2}{13}\sin 2x\Big)+C.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\int e^{3x}\sin^2 x\mathrm{d}x &= \int e^{3x}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{6}\int e^{3x}\mathrm{d}(3x)-\frac{1}{2}\int e^{3x}\cos 2x\mathrm{d}x\\ &= e^{3x}\Big(\frac{1}{6}-\frac{3}{26}\cos 2x-\frac{1}{13}\sin 2x\Big)+C.\end{aligned}$$

□

二. 求 $I_n = \int \frac{1}{x^n\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$ 的递推公式.

解.

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1}+C,\\
I_{n+1} &= \int \frac{(x+1)-x}{x^{n+1}\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x\\
&= \int \frac{\sqrt{x+1}}{x^{n+1}}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^n\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x\\
&= \Big(-\frac{\sqrt{x+1}}{nx^n} + \frac{1}{2n}\int \frac{1}{x^n\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x\Big) - I_n\\
&= -\frac{\sqrt{x+1}}{nx^n} - \Big(1-\frac{1}{2n}\Big)I_n.
\end{aligned}$$

□

附加题: 求不定积分:

1. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$

解. 当 $x>0$ 时,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}} = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\Big(\frac{1}{x^2}-1\Big)}{\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}\\
&= -\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}+C = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C,
\end{aligned}$$

当 $x<0$ 时类似可得相同结论. 于是

$$\begin{aligned}\int \frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x &= \int \arcsin x\cdot \mathrm{d}\Big(-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\Big)\\ &= -\frac{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{x}+\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\cdot \mathrm{d}(\arcsin x)\\ &= -\frac{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{x}+\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x\\ &= -\frac{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{x}+\ln|x|+C.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\int \frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\ =\ &\int \frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\ =\ &-\frac{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{x}+\ln|x|+\int \arcsin x\mathrm{d}(\arcsin x)\\ =\ &-\frac{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{x}+\ln|x|+\frac{1}{2}\arcsin^2 x+C.\end{aligned}$$

□

2. $\displaystyle\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-2}}\mathrm{d}x.$

解. 令 $\sqrt{e^x-2}=t$, 则 $t>0$, 且

$$x=\ln(t^2+2),\ \mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2+2}\mathrm{d}t.$$

于是

$$\begin{aligned}\int \sqrt{e^x-2}\mathrm{d}x &= \int \frac{2t^2}{t^2+2}\mathrm{d}t\\ &= \int \Big(2-\frac{4}{t^2+2}\Big)\mathrm{d}t\\ &= 2t-2\sqrt{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+C\\ &= 2\sqrt{e^x-2}-2\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{e^x}{2}-1}+C.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-2}}\mathrm{d}x &= \int x\mathrm{d}(2\sqrt{e^x-2}) \\ &= 2x\sqrt{e^x-2} - 2\int \sqrt{e^x-2}\mathrm{d}x \\ &= 2(x-2)\sqrt{e^x-2} + 4\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{e^x}{2}-1} + C.\end{aligned}$$

$\square$

24 有理函数的积分

一. 计算下列不定积分:

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^5(x^6+1)}\mathrm{d}x.$

解. 令 $u=x^2$, 则

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^5(x^6+1)}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2)}{x^6(x^6+1)}\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^3(u^3+1)}\\ &= \frac{1}{2}\int \Big(\frac{1}{u^3}-\frac{1}{u^3+1}\Big)\mathrm{d}u\\ &= -\frac{1}{4u^2}-\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u+1)(u^2-u+1)}.\end{aligned}$$

设 $\displaystyle\frac{1}{(u+1)(u^2-u+1)}=\frac{A}{u+1}+\frac{Bu+C}{u^2-u+1}$, 通分后比较分子得

$$1=A(u^2-u+1)+(Bu+C)(u+1),$$

令 $u=-1$ 得 $A=\dfrac{1}{3}$; 比较 u^2 的系数得 $A+B=0$, 于是 $B=-\dfrac{1}{3}$; 比较常数项得 $A+C=1$, 于是 $C=\dfrac{2}{3}$. 故

$$\begin{aligned}&\int \frac{\mathrm{d}u}{(u+1)(u^2-u+1)}\\ =&\int \Big[\frac{1}{3(u+1)}-\frac{u-2}{3(u^2-u+1)}\Big]\mathrm{d}u\\ =&\frac{1}{3}\ln|u+1|-\frac{1}{6}\int \frac{2u-1}{u^2-u+1}\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-u+1}\\ =&\frac{1}{3}\ln|u+1|-\frac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}(u^2-u+1)}{u^2-u+1}+\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\Big(u-\frac{1}{2}\Big)}{\Big(u-\frac{1}{2}\Big)^2+\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^2}\\ =&\frac{1}{3}\ln|u+1|-\frac{1}{6}\ln|u^2-u+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u-1}{\sqrt{3}}+C.\end{aligned}$$

因此

$$
\begin{aligned}
& \int \frac{1}{x^5(x^6+1)}\mathrm{d}x \\
= \; & -\frac{1}{4u^2} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u+1)(u^2-u+1)} \\
= \; & -\frac{1}{4u^2} - \frac{1}{6}\ln|u+1| + \frac{1}{12}\ln|u^2-u+1| - \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2u-1}{\sqrt{3}} + C \\
= \; & -\frac{1}{4x^4} - \frac{1}{6}\ln(x^2+1) + \frac{1}{12}\ln(x^4-x^2+1) - \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}
$$

□

2. $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2+4x+7}\mathrm{d}x.$

解.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{3x+5}{x^2+4x+7}\mathrm{d}x &= \frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+7}\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+7} \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+4x+7)}{x^2+4x+7} - \int \frac{\mathrm{d}(x+2)}{(x+2)^2+(\sqrt{3})^2} \\
&= \frac{3}{2}\ln(x^2+4x+7) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}
$$

□

3. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+1)^{10}}\mathrm{d}x.$

解. 令 $u=x+1$, 则

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{(x+1)^{10}}\mathrm{d}x &= \int \frac{(u-1)^2}{u^{10}}\mathrm{d}u \\
&= \int \left(\frac{1}{u^8} - \frac{2}{u^9} + \frac{1}{u^{10}}\right)\mathrm{d}u \\
&= -\frac{1}{7u^7} + \frac{1}{4u^8} - \frac{1}{9u^9} + C \\
&= -\frac{1}{7(x+1)^7} + \frac{1}{4(x+1)^8} - \frac{1}{9(x+1)^9} + C.
\end{aligned}
$$

□

4. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x.$

解. 令 $u=\sin x$, 则 $\mathrm{d}u=\cos x\mathrm{d}x$. 因此

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x &= \int \frac{(1-\sin^2 x)\mathrm{d}(\sin x)}{1+\sin^2 x}\\
&= \int \frac{1-u^2}{1+u^2}\mathrm{d}u\\
&= \int \Big(\frac{2}{1+u^2}-1\Big)\mathrm{d}u\\
&= 2\arctan u - u + C\\
&= 2\arctan(\sin x)-\sin x + C.
\end{aligned}$$

□

5. $\displaystyle\int \frac{1}{3+\cos x}\mathrm{d}x.$

解.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{3+\cos x}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{3+\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)}\mathrm{d}x = \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2\sec^2\frac{x}{2}+2}\mathrm{d}x\\
&= \int \frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+2}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan^2\frac{x}{2}+(\sqrt{2})^2}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}+C.
\end{aligned}$$

□

6. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x.$

解. 令 $t=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, 则 $t>0$, 且

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \mathrm{d}x=-\frac{4t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t.$$

因此

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x &= \int \frac{t(1+t^2)}{1-t^2}\cdot\Big(-\frac{4t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t\Big)\\
&= \int \frac{4t^2}{(t^2-1)(t^2+1)}\mathrm{d}t\\
&= 2\int\Big(\frac{1}{t^2-1}+\frac{1}{t^2+1}\Big)\mathrm{d}t\\
&= \ln\Big|\frac{t-1}{t+1}\Big|+2\arctan t+C\\
&= \ln\Big|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\Big|+2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C\\
&= \ln\Big|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\Big|+2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.
\end{aligned}
$$

□

25 单元检测

一. 填空:

1. $\ln x$ 为 $\dfrac{1}{x}$ 的原函数.

2. $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数, $\displaystyle\int f(2x+1)F^2(2x+1)\mathrm{d}x = \frac{F^3(2x+1)}{6} + C$.

提示.

$$\int f(2x+1)F^2(2x+1)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int F^2(2x+1)\mathrm{d}[F(2x+1)].$$

□

3. $\dfrac{\sin x}{x}$ 为 $f(x)$ 的原函数, $\displaystyle\int xf(x) = \sin x - \int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

提示.

$$\int xf(x) = x\cdot\frac{\sin x}{x} - \int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$$

□

4. $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^2 - t + 1 \\ y = t - \dfrac{1}{t} + 3 \end{cases}$ 决定, $\displaystyle\int y\mathrm{d}x = \frac{2}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 + \ln|t| - 5t + C$.

提示.

$$\int y\mathrm{d}x = \int \Big(t - \frac{1}{t} + 3\Big)\mathrm{d}(t^2 - t + 1) = \int \Big(2t^2 + 5t + \frac{1}{t} - 5\Big)\mathrm{d}t.$$

□

5. $f'(x) = x^2\sqrt{1+x^3}$, $f(0) = 1$, 则 $f(x) = \dfrac{2}{9}(1+x^3)^{\frac{3}{2}} + \dfrac{7}{9}$.

提示.

$$\begin{aligned} f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x &= \int x^2\sqrt{1+x^3}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\int\sqrt{1+x^3}\mathrm{d}(1+x^3) \\ &= \frac{2}{9}(1+x^3)^{\frac{3}{2}}+C, \end{aligned}$$

由 $f(0)=1$ 解得 $C=\dfrac{7}{9}$. □

二. 计算下列各积分:

1. $\displaystyle\int\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}\mathrm{d}x.$

解.

$$\begin{aligned} \int\ln(1+e^x)\cdot e^{-x}\mathrm{d}x &= -e^{-x}\ln(1+e^x)+\int e^{-x}\cdot\frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x \\ &= -e^{-x}\ln(1+e^x)+\int\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x \\ &= -e^{-x}\ln(1+e^x)-\int\frac{\mathrm{d}(1+e^{-x})}{1+e^{-x}} \\ &= -e^{-x}\ln(1+e^x)-\ln(1+e^{-x})+C. \end{aligned}$$

□

2. $\displaystyle\int\frac{1-x^n}{x(1+x^n)}\mathrm{d}x\ (n\neq 0).$

解.

$$\begin{aligned} \int\frac{1-x^n}{x(1+x^n)}\mathrm{d}x &= \int\Big(\frac{1}{x}-\frac{2x^{n-1}}{1+x^n}\Big)\mathrm{d}x \\ &= \int\frac{\mathrm{d}x}{x}-\frac{2}{n}\int\frac{\mathrm{d}(1+x^n)}{1+x^n} \\ &= \ln|x|-\frac{2}{n}\ln|1+x^n|+C. \end{aligned}$$

□

3. $\displaystyle\int \frac{1}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$

解. 令 $x=\tan t$, $-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$, 则

$$\sin t=\frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ \mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t.$$

因此

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x &= \int \frac{\sec^2 t}{(2\tan^2 t+1)\sec t}\mathrm{d}t\\ &= \int \frac{\cos t}{2\sin^2 t+\cos^2 t}\mathrm{d}t\\ &= \int \frac{\mathrm{d}(\sin t)}{1+\sin^2 t}\mathrm{d}t\\ &= \arctan(\sin t)+C\\ &= \arctan\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.\end{aligned}$$

□

4. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x.$

解.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x &= \int \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\frac{1}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x-\int \frac{\mathrm{d}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}} \\
&= \frac{x}{2}-\ln\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|+C \\
&= \frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2+C \\
&= \frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln(1+\sin x)+C.
\end{aligned}$$

□

5. $\int \frac{x^2-2}{x^3}e^x\mathrm{d}x.$

解.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2-2}{x^3}e^x\mathrm{d}x &= \int \frac{e^x}{x}\mathrm{d}x-2\int \frac{e^x}{x^3}\mathrm{d}x \\
&= \frac{e^x}{x}+\int \frac{e^x}{x^2}\mathrm{d}x-2\int \frac{e^x}{x^3}\mathrm{d}x \\
&= \frac{e^x}{x}+\left(\frac{e^x}{x^2}+2\int \frac{e^x}{x^3}\mathrm{d}x\right)-2\int \frac{e^x}{x^3}\mathrm{d}x \\
&= \frac{e^x}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)+C.
\end{aligned}$$

□

三. $F(x)$ **为** $f(x)$ **的原函数,** $F(1)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$**,** $x>0$ **时,** $f(x)F(x)=\dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$**, 求** $f(x)$**.**

解. 令 $x=t^2$, $t>0$, 则 $t=\sqrt{x}$, $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$. 于是

$$\begin{aligned}\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x &= \int\frac{\arctan t}{t(1+t^2)}\cdot 2t\mathrm{d}t\\ &= \int 2\arctan t\mathrm{d}(\arctan t)\\ &= \arctan^2 t+C\\ &= \arctan^2\sqrt{x}+C.\end{aligned}$$

故

$$\frac{1}{2}F^2(x)=\int F(x)f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x=\arctan^2\sqrt{x}+C.$$

由 $F(1)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$ 得 $C=0$, 因此

$$F(x)=\sqrt{2}\arctan\sqrt{x},$$

$$f(x)=F'(x)=\frac{\sqrt{2}}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{2x}(1+x)}.$$

□

四. **隐函数** $y=y(x)$ **由方程** $y^2(x-y)=x^2$ **决定, 求** $\int \frac{1}{y^2}\mathrm{d}x$**.**

解. 由已知, $y^2=\dfrac{x^2}{x-y}$, 于是

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{y^2}\mathrm{d}x &= \frac{x}{y^2}+2\int \frac{x}{y^3}\mathrm{d}y\\
&= \frac{x}{y^2}+2\int \frac{x-y}{xy}\mathrm{d}y\\
&= \frac{x}{y^2}+2\Big(\int \frac{dy}{y}-\int \frac{\mathrm{d}y}{x}\Big)\\
&= \frac{x}{y^2}+2\ln|y|-2\int \frac{\mathrm{d}y}{x}\\
&= \frac{x}{y^2}+2\ln|y|-2\Big(\frac{y}{x}+\int \frac{y}{x^2}\mathrm{d}x\Big)\\
&= \frac{x}{y^2}+2\ln|y|-2\Big[\frac{y}{x}+\int \Big(\frac{1}{x}-\frac{x-y}{x^2}\Big)\mathrm{d}x\Big]\\
&= \frac{x}{y^2}+2\ln|y|-2\Big(\frac{y}{x}+\ln|x|-\int \frac{1}{y^2}\mathrm{d}x\Big).
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{y^2}\mathrm{d}x &= 2\ln|x|-2\ln|y|+\frac{2y}{x}-\frac{x}{y^2}+C\\
&= 2\ln\left|\frac{x}{y}\right|+\frac{2y^3-y^2(x-y)}{xy^2}+C\\
&= 2\ln\left|\frac{x}{y}\right|+\frac{3y}{x}+C.
\end{aligned}
$$

□

五. **求** $I_n = \int \ln^n x \mathrm{d}x$ **的递推公式.**

解.

$$
\begin{aligned}
I_0 &= \int \mathrm{d}x = x + C, \\
I_{n+1} &= \int \ln^n x \mathrm{d}x \\
&= x\ln^{n+1} x - (n+1)\int \frac{x\ln^n x}{x}\mathrm{d}x \\
&= x\ln^{n+1} x - (n+1)\int \ln^n x \mathrm{d}x \\
&= x\ln^{n+1} x - (n+1)I_n.
\end{aligned}
$$

□

六. **已知曲线** $y = y(x)$ **上点** (x, y) **处切线的斜率为** $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$**, 且曲线过点** $(-2, 0)$**,** $(2, \pi)$**, 求曲线的方程.**

解. 当 $x > 0$ 时, 曲线的方程为

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{x^2\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\mathrm{d}x \\
&= -\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \\
&= -\arcsin\frac{1}{x} + C_1.
\end{aligned}
$$

由 $y(2) = \pi$ 得 $C_1 = \dfrac{7\pi}{6}$.

当 $x<0$ 时, 曲线的方程为

$$\begin{aligned} y(x) &= \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x \\ &= -\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \\ &= \arcsin\frac{1}{x}+C_2. \end{aligned}$$

由 $y(-2)=0$ 得 $C_2=\frac{\pi}{6}$.

因此曲线的方程为

$$y(x)=\begin{cases} -\arcsin\frac{1}{x}+\frac{7\pi}{6}, & x>0, \\ \arcsin\frac{1}{x}+\frac{\pi}{6}, & x<0. \end{cases}$$

□

七. 用两种方法求不定积分 $\int \frac{\sin x}{\sin x+3\cos x}\mathrm{d}x$.

解法一. 令 $t=\tan x$, 则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\arctan t)=\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$, 故

$$\int \frac{\sin x}{\sin x+3\cos x}\mathrm{d}x=\int \frac{\tan x}{\tan x+3}\mathrm{d}x=\int \frac{t}{(t+3)(t^2+1)}\mathrm{d}t.$$

设 $\frac{t}{(t+3)(t^2+1)}=\frac{A}{t+3}+\frac{Bt+C}{t^2+1}$, 通分后比较分子得

$$t=A(t^2+1)+(Bt+C)(t+3).$$

令 $t=-3$ 得 $A=-\dfrac{3}{10}$; 比较 t^2 的系数得 $A+B=0$, 于是 $B=\dfrac{3}{10}$; 比较常数项得 $A+3C=0$, 于是 $C=\dfrac{1}{10}$. 因此

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sin x}{\sin x+3\cos x}\mathrm{d}x &= \int \frac{t}{(t+3)(t^2+1)}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{3}{10}\int \frac{\mathrm{d}t}{t+3}+\frac{1}{10}\int \frac{3t+1}{t^2+1}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{3}{10}\int \frac{\mathrm{d}(t+3)}{t+3}+\frac{3}{20}\int \frac{\mathrm{d}(t^2+1)}{t^2+1}+\frac{1}{10}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} \\
&= -\frac{3}{10}\ln|t+3|+\frac{3}{20}\ln(t^2+1)+\frac{1}{10}\arctan t+C \\
&= -\frac{3}{10}\ln|\tan x+3|+\frac{3}{20}\ln(\tan^2 x+1)+\frac{x}{10}+C \\
&= -\frac{3}{10}\ln|\tan x+3|+\frac{3}{10}\ln|\sec x|+\frac{x}{10}+C \\
&= \frac{3}{10}\ln\left|\frac{\sec x}{\tan x+3}\right|+\frac{x}{10}+C \\
&= \frac{3}{10}\ln\left|\frac{1}{\sin x+3\cos x}\right|+\frac{x}{10}+C \\
&= \frac{x}{10}-\frac{3}{10}\ln|\sin x+3\cos x|+C.
\end{aligned}
$$

□

解法二. 令 $\sin x=A(\sin x+3\cos x)+B(\cos x-3\sin x)$, 比较系数得

$$
\begin{cases}
A-3B=1, \\
3A+B=0.
\end{cases}
$$

解得 $A=\dfrac{1}{10}$, $B=-\dfrac{3}{10}$. 因此

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sin x}{\sin x+3\cos x}\mathrm{d}x &= \int \frac{\frac{1}{10}(\sin x+3\cos x)-\frac{3}{10}(\cos x-3\sin x)}{\sin x+3\cos x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{10}\int \mathrm{d}x-\frac{3}{10}\int \frac{\mathrm{d}(\sin x+3\cos x)}{\sin x+3\cos x} \\
&= \frac{x}{10}-\frac{3}{10}\ln|\sin x+3\cos x|+C.
\end{aligned}
$$

$\square$

解法三. 令 $I=\int\frac{\sin x}{\sin x+3\cos x}\mathrm{d}x$, $J=\int\frac{\cos x}{\sin x+3\cos x}\mathrm{d}x$, 则

$$\begin{cases}I+3J=\int\mathrm{d}x=x+C_1,\\ J-3I=\int\frac{\cos x-3\sin x}{\sin x+3\cos x}\mathrm{d}x=\ln|\sin x+3\cos x|+C_2.\end{cases}$$

因此

$$I=\frac{1}{10}[(I+3J)-3(J-3I)]=\frac{x}{10}-\frac{3}{10}\ln|\sin x+3\cos x|+C.$$

$\square$

八.　证明: $y=\frac{x^2}{2}\mathrm{sgn}\,(x)$ 是 $|x|$ 的原函数.

证明. 当 $x>0$ 或 $x<0$ 时显然 $y'=|x|$. 当 $x=0$ 时,

$$y'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{x^2}{2}\mathrm{sgn}\,(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{x^2}{2}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{2}=0,$$

$$y'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{x^2}{2}\mathrm{sgn}\,(x)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x}=\lim_{x\to0^-}\left(-\frac{x}{2}\right)=0,$$

因此 $y'(0)=y'_+(0)=y'_-(0)=0=|0|$, 从而 $y=\frac{x^2}{2}\mathrm{sgn}\,(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是 $|x|$ 的原函数. $\square$