四　川　大　学

硕　士　学　位　论　文

题目　概 念 格 的 函 子 性 质

作者　申 力 立　完成时间　2011 年 4 月 26 日

培养单位　四　川　大　学

指导老师　张 德 学 教 授

专　　业　基　础　数　学

研究方向　拓　扑　学

授予学位时间　年　月　日

概念格的函子性质

基础数学专业

研究生: 申力立　　**指导老师**: 张德学教授

摘要

本文系统研究了基于形式概念分析和粗糙集理论的 L-背景的概念格, 这里 L 是一个有单位元的 quantale. 证明了形式概念格和面向属性概念格各自指定了一个从 L-**Ctx** 到 L-**Sup** 的函子, 这里 L-**Ctx** 是 L-背景和信息态射构成的范畴, L-**Sup** 是 L-完备格和保上确界映射构成的范畴. 并且, 形式概念格函子可以表示为一个 L-**Ctx** 到 L-闭包空间和连续映射构成的范畴 L-**Cls** 的右伴函子和一个 L-**Cls** 到 L-**Sup** 的左伴函子的复合. 进一步, 证明了每个 L-完备格可以表示为某个 L-背景的形式概念格. 但是, 在 $1 \in L$ 是单位元, $0 \in L$ 是循环元的前提下, 每个 L-完备格同构于某个 L-背景的面向属性概念格当且仅当 L 是 Girard quantale.

关键词: 形式概念分析, 粗糙集理论, 概念格, Quantale, L-完备格, L-闭包空间.

Functorial Properties of Concept Lattices

Major: Fundamental Mathematics

Graduate student: Shen Lili **Supervisor:** Professor Zhang Dexue

Abstract: This thesis presents a systematic study of concept lattices of L-contexts based on formal concept analysis and rough set theory for a unital quantale L. It is shown that, both formal concept lattices and property oriented concept lattices are functorial from the category L-**Ctx** of L-contexts and infomorphisms to the category L-**Sup** of complete L-lattices and suprema-preserving maps. Moreover, the formal concept lattice functor can be written as the composition of a right adjoint functor from L-**Ctx** to the category L-**Cls** of L-closure spaces and continuous functions and a left adjoint functor from L-**Cls** to L-**Sup**. Furthermore, it is proved that every complete L-lattice can be represented as the formal concept lattice of an L-context. But under the condition that $1 \in L$ being the unit and $0 \in L$ being cyclic, every complete L-lattice can be represented as the property oriented concept lattice of an L-context if and only if L is a Girard quantale.

Key words: Formal concept analysis, Rough set theory, Concept lattice, Quantale, Complete L-lattice, L-closure space.

目 录

1 引言 **1**

2 经典情形的概念格 **4**

2.1 基于形式概念分析的概念格 4

2.2 基于粗糙集理论的概念格 4

3 Quantale 与 L-背景 **6**

4 L-序与 L-完备格 **9**

5 L-闭包空间 **15**

6 L-背景, L-完备格与 L-闭包空间的范畴联系 **17**

6.1 L-闭包空间与 L-完备格之间的一对伴随 17

6.2 L-闭包空间与 L-背景之间的一对伴随 22

7 基于形式概念分析的概念格函子 **27**

8 基于粗糙集理论的概念格函子 **31**

参考文献 **37**

作者攻读硕士学位期间完成的论文目录 **39**

声明 **40**

致谢 **41**

§1 引言

形式概念分析 (以下简称为 FCA) [5, 9] 与粗糙集理论 (以下简称为 RST) [10, 26] 是定性数据分析的重要工具. 这两种理论都是在形式背景的框架下建立起来的. 所谓形式背景 (以下简称为背景) 是一个三元组 (X, Y, R), 其中 X 和 Y 是集合, $R \subseteq X \times Y$是 X 到 Y 的关系. 在一个背景 (X, Y, R) 中, X 称为对象集, Y 称为属性集, $(x, y) \in R$ 解释为对象 x 具有属性 y. 给定一个背景 (X, Y, R), 在 X 与 Y 的幂集之间存在两对 Galois 联络 [7], 分别是反变的 $(R_{\uparrow}, R^{\downarrow})$ 和协变的 $(R_{\exists}, R^{\forall})$, 它们分别是 FCA 和 RST 的核心算子.

背景 (X, Y, R) 的一个形式概念 (或者叫做基于 FCA 的概念) 是指满足 $U = R^{\downarrow}(V)$ 和 $V = R_{\uparrow}(U)$ 的序对 $(U, V) \in 2^X \times 2^Y$. (X, Y, R) 的所有形式概念构成一个完备格, 称作 (X, Y, R) 的形式概念格, 记为 $\mathfrak{B}(X, Y, R)$. FCA 基本定理指出, 每个完备格都同构于某个背景的形式概念格.

2002 年, Düntsch 和 Gediga [10] 用协变 Galois 联络 $(R_{\exists}, R^{\forall})$ [7] 代替反变 Galois 联络 $(R_{\uparrow}, R^{\downarrow})$ 后, 引入了面向属性概念 (或者叫做基于 RST 的概念). 背景 (X, Y, R) 的所有面向属性概念同样构成一个完备格, 称作 (X, Y, R) 的面向属性概念格, 记为 $\mathfrak{P}(X, Y, R)$. 同样地, 每个完备格也同构于某个背景的面向属性概念格 [27].

为了研究 $\mathfrak{B}$ 和 $\mathfrak{P}$ 的函子性质 (范畴论的相关知识参考 [18]), 我们需要考虑形式背景和完备格之间的态射. 完备格之间的态射取保并映射, 完备格和保并映射构成的范畴记为 **Sup**. 形式背景之间有若干种态射, 参见 [6, 8, 9, 14, 15, 19, 25, 28]. 2007 年, Mori [19] 证明了 $\mathfrak{B}$ 是从形式背景和 Chu 对应 (Chu correspondence) 构成的范畴到 **Sup** 的函子. 本文将考虑与 Chu 对应不同的一种态射, 即信息态射 (infomorphism). 两个背景之间的信息态射 [8, 15] $(f, g) : (X, Y, R) \longrightarrow (A, B, S)$ 由一对映射 $f : X \longrightarrow A$ 和 $g : B \longrightarrow Y$ 构成, 满足对任意 $x \in X$ 和 $b \in B$, $(x, g(b)) \in R$ 当且仅当 $(f(x), b) \in S$. 形式背景和信息态射构成一个范畴 **Ctx**.

虽然可以直接证明 $\mathfrak{B}$ 和 $\mathfrak{P}$ 都是 **Ctx** 到 **Sup** 的函子, 但本文将利用闭包空间作为桥梁来得到这一结论. 这样做的好处是可以获得 $\mathfrak{B}$ 和 $\mathfrak{P}$ 的分解, 这些分解有助于进一步研究概念格函子以及形式背景, 闭包空间和完备格之间的关系.

设 X 为集合, 一个 X 的幂集上的保序映射 $c : 2^X \longrightarrow 2^X$ 称作闭包算子, 如果对任意 $A \subseteq X$ 有 $A \subseteq c(A)$, 并且 $c \circ c = c$. 序对 (X, c) 称作闭包空间, 满足 $A = c(A)$ 的子集 $A \subseteq X$ 称作闭子集. 闭包空间之间的映射 $f : (X, c) \longrightarrow (Y, d)$ 称作连续的, 如果对 X 的每个子集 A 有 $f(c(A)) \subseteq d(f(A))$. 闭包空间和连续映射构成的范畴记作 **Cls**. 给定背景 (X, Y, R), $R^{\downarrow} \circ R_{\uparrow}$ 和 $R^{\forall} \circ R_{\exists}$ 都是 X 上的闭包算子. 对应 $(X, Y, R) \mapsto (X, R^{\downarrow} \circ R_{\uparrow})$ 定义了一个有左伴的函子 $U : \mathbf{Ctx} \longrightarrow \mathbf{Cls}$. 给定闭包空间 (X, c), 它的所有闭子集组成的集合 $c(2^X)$ 是完备格. 对应 $(X, c) \mapsto c(2^X)$ 定义了一个有右伴的函子 $T : \mathbf{Cls} \longrightarrow \mathbf{Sup}$.

对每个背景 (X, Y, R), $T \circ U(X, Y, R)$ 与形式概念格 $\mathfrak{B}(X, Y, R)$ 同构. 因此 $\mathfrak{B}$ 是从 **Ctx** 到 **Sup** 的函子, 并且它是右伴函子 $U : \mathbf{Ctx} \longrightarrow \mathbf{Cls}$ 和左伴函子 $T : \mathbf{Cls} \longrightarrow \mathbf{Sup}$ 的复合. 面向属性概念格函子也可以写成另一个函子 $V : \mathbf{Ctx} \longrightarrow \mathbf{Cls}$ 和函子 $T : \mathbf{Cls} \longrightarrow \mathbf{Sup}$ 的复合.

事实上, 我们将证明一个更为一般的结论, 粗略地说, 上述结论在非交换的多值情形下也是成立的. 为此, 我们需要作一些必要的说明.

FCA 和 RST 的理论都已经被推广到了多值情形 [4, 10, 11, 12, 16, 20, 26]. 设 $(L, *, 1)$ 为完备剩余格 (即单位元是最大元的交换 quantale), 一个 L-背景是指三元组 (X, Y, R), 其中 $R : X \times Y \longrightarrow L$ 是从集合 X 到 Y 的 L-关系. 给定 L-背景 (X, Y, R), Bělohlávek 引入了 L-幂集 L^X 与 L^Y 之间的反变 Galois 联络 $(R_{\uparrow}, R^{\downarrow})$ [2], 并利用它定义了 L-背景的形式概念 [3]. FCA 基本定理也在文献 [3] 中推广到了多值情形. 确切地说, Bělohlávek 引入 L-完备格的概念, 证明了 L-背景 (X, Y, R) 的所有形式概念构成的集合 $\mathfrak{B}(X, Y, R)$是 L-完备格, 并且每个 L-完备格同构于某个 L-背景 (X, Y, R) 的形式概念格 $\mathfrak{B}(X, Y, R)$.

对 L-背景 (X, Y, R), 文献 [12, 21] 中定义了 L-幂集 L^X 与 L^Y 之间的协变 Galois 联络 $(R_{\exists}, R^{\forall})$, 它是研究多值 RST 的基本工具. 和经典情形类似, 文献 [10, 20, 26] 引入了 L-背景的面向属性概念. 在文献 [16] 中, 赖洪亮和张德学证明了 L-背景 (X, Y, R) 的所有面向属性概念构成的集合 $\mathfrak{P}(X, Y, R)$ 也是 L-完备格 , 但是, 并不是每个 L-完备格都能表示成某个 L-背景的面向属性概念格. 事实上, 每个 L-完备格同构于某个 L-背景的面向属性概念格当且仅当 L 满足二次否定律, 即 L 是 Girard quantale.

对任意有单位元的 quantale $(L, *)$, 本文证明了形式概念格和面向属性概念格各自指定了一个从 L-背景范畴 L-**Ctx** 到 L-完备格范畴 L-**Sup** 的函子, 讨论了它们之间的联系, 并且证明了形式概念格函子可以表示为一个从 L-**Ctx** 到 L-闭包空间和连续映射构成的范畴 L-**Cls** 的右伴函子和一个从 L-**Cls** 到 L-**Sup** 的左伴函子的复合. 在此基础上, 我们证明了每个 L-完备格可以表示为某个 L-背景的形式概念格. 但是, 在 $1 \in L$ 是单位元, $0 \in L$ 是循环元的前提下, 每个 L-完备格同构于某个 L-背景的面向属性概念格当且仅当 L 是 Girard quantale.

§2 经典情形的概念格

§2.1 基于形式概念分析的概念格

给定背景 (X,Y,R) , 在 X 和 Y 的幂集之间有一对反变 Galois 联络 $(R_{\uparrow},R^{\downarrow})$, 其定义如下:

$$R_{\uparrow}:2^X\longrightarrow 2^Y,\ R_{\uparrow}(U)=\{y\in Y:\forall x\in U,xRy\};$$

$$R^{\downarrow}:2^Y\longrightarrow 2^X,\ R^{\downarrow}(V)=\{x\in X:\forall y\in V,xRy\}.$$

背景 (X,Y,R) 的一个形式概念 (formal concept) [9] 是指满足 $U=R^{\downarrow}(V)$ 和 $V=R_{\uparrow}(U)$ 的序对 $(U,V)\in 2^X\times 2^Y$. U 称作外延 (extent), V 称作内涵 (intent). 形式概念也称作基于 FCA 的概念. (X,Y,R) 的所有形式概念组成的集合记作 $\mathfrak{B}(X,Y,R)$.

设 $(U_1,V_1),(U_2,V_2)\in\mathfrak{B}(X,Y,R)$, 易知 $U_1\subseteq U_2 \iff V_2\subseteq V_1$. 定义 $\mathfrak{B}(X,Y,R)$ 上的偏序关系如下:

$$(U_1,V_1)\leq(U_2,V_2)\iff U_1\subseteq U_2\iff V_2\subseteq V_1.$$

则背景 (X,Y,R) 的所有形式概念构成一个完备格. 事实上, 给定 (X,Y,R) 的一族形式概念 $\mathcal{U}=\{(U_i,V_i:i\in I\}$, 我们有

$$\bigvee\mathcal{U}=\Big(R^{\downarrow}(\bigcap_{i\in I}V_i),\bigcap_{i\in I}V_i\Big),\bigwedge\mathcal{U}=\Big(\bigcap_{i\in I}U_i,R_{\uparrow}(\bigcap_{i\in I}U_i)\Big).$$

反过来, 概念格基本定理 (Fundamental Theorem of Concept Lattices) [5] 告诉我们, 每个完备格都同构于某个背景 (X,Y,R) 的形式概念格.

§2.2 基于粗糙集理论的概念格

给定背景 (X,Y,R) , 在 X 和 Y 的幂集之间还有一对协变 Galois 联络 $(R_{\exists},R^{\forall})$, 其定义如下:

$$R_{\exists}:2^X\longrightarrow 2^Y,\ R_{\exists}(U)=\{y\in Y:\exists x\in U,xRy\};$$

$$R^{\forall}:2^Y\longrightarrow 2^X,\ R^{\forall}(V)=\{x\in X:\forall y\in Y,xRy\Rightarrow y\in V\}.$$

背景 (X, Y, R) 的一个面向属性概念 (property oriented concept) [10] 是指满足 $U = R^{\forall}(V)$ 和 $V = R_{\exists}(U)$ 的序对 $(U, V) \in 2^X \times 2^Y$. 它的意义是, U 中的对象所拥有的任何属性都在 V 中; 并且, V 中的任何属性一定被 U 中的某个对象所拥有. 面向属性概念也称作基于 RST 的概念. (X, Y, R) 的所有面向属性概念组成的集合记作 $\mathfrak{P}(X, Y, R)$.

对任意二元关系 $R \subseteq X \times Y$ 和子集 $U \subseteq X, V \subseteq Y$, 令 $\neg R = (X \times Y) \backslash R$ 以及 $\neg V = Y \backslash V$, 则 $\neg((\neg R)_{\uparrow}(U)) = R_{\exists}(U)$, 且 $(\neg R)^{\downarrow}(\neg V) = R^{\forall}(V)$. 从而

$$R_{\exists} = \neg \circ (\neg R)_{\uparrow}, \quad R^{\forall} = (\neg R)^{\downarrow} \circ \neg.$$

因此, (U, V) 是背景 (X, Y, R) 的面向属性概念当且仅当 $(U, \neg V)$ 是背景 $(X, Y, \neg R)$ 的形式概念 [27]. 在 $\mathfrak{P}(X, Y, R)$ 上定义偏序关系如下:

$$(U_1, V_1) \leq (U_2, V_2) \iff U_1 \subseteq U_2 \iff V_1 \subseteq V_2.$$

则背景 (X, Y, R) 的所有面向属性概念也构成一个完备格, 并且它与 $\mathfrak{B}(X, Y, \neg R)$ 同构. 所以, 反过来, 每个完备格也同构于某个背景 (X, Y, R) 的面向属性概念格.

§3 Quantale 与 L-背景

设 L 是一个完备格 (complete lattice), $*$ 是 L 上满足结合律的二元运算, 如果对任意 $a, b_i \in L$ 都成立 $a * (\bigvee b_i) = \bigvee(a * b_i)$ 和 $(\bigvee b_i) * a = \bigvee(b_i * a)$, $(L, *)$ 就称为一个 quantale. L 的最大元和最小元分别记作 1 和 0. 如果存在 $I \in L$ 使得对任意 $a \in L$ 都成立 $I * a = a = a * I$, 我们就称 I 为单位元. 如果对任意 $a, b \in L$ 都成立 $a * b = b * a$, 我们就称 quantale $(L, *)$ 为交换的 (commutative).

定义3.1. [22] 设 $(L, *)$ 为一个 quantale. 二元运算 $\rightarrow_l, \rightarrow_r$: $L \times L \longrightarrow L$ 定义为

$$b \rightarrow_l c = \bigvee\{a \in L : a * b \leq c\} \ ; \ b \rightarrow_r c = \bigvee\{a \in L : b * a \leq c\}.$$

如果 $(L, *)$ 是交换的, 则 $\rightarrow_l = \rightarrow_r$ 并统一表示为 $\rightarrow$.

命题3.2. [22] 设 $(L, *)$ 为一个 *quantale*. 对任意的$a, b, c, a_t, b_t \in L$, 下列式子成立:

(I1) $a * b \leq c \iff a \leq b \rightarrow_l c \iff b \leq a \rightarrow_r c.$

(I2) $a \rightarrow_l (\bigwedge b_t) = \bigwedge(a \rightarrow_l b_t)$; $a \rightarrow_r (\bigwedge b_t) = \bigwedge(a \rightarrow_r b_t).$

(I3) $(\bigvee a_t) \rightarrow_l b = \bigwedge(a_t \rightarrow_l b)$; $(\bigvee a_t) \rightarrow_r b = \bigwedge(a_t \rightarrow_r b).$

(I4) $(a \rightarrow_r b) * (b \rightarrow_r c) \leq a \rightarrow_r c$; $(b \rightarrow_l c) * (a \rightarrow_l b) \leq a \rightarrow_l c.$

(I5) $a \rightarrow_l (b \rightarrow_l c) = (a * b) \rightarrow_l c$; $a \rightarrow_r (b \rightarrow_r c) = (b * a) \rightarrow_r c.$

(I6) $a \rightarrow_r (b \rightarrow_l c) = b \rightarrow_l (a \rightarrow_r c).$

(I7) $a * (a \rightarrow_r b) \leq b$; $(a \rightarrow_l b) * a \leq b.$

设 $d \in L$, 如果对任意 $a \in L$ 都成立 $a \rightarrow_l d = a \rightarrow_r d$, 则称 d 为循环的 (cyclic) [22]. 此时, 我们用 $a \rightarrow d$ 来表示 $a \rightarrow_l d = a \rightarrow_r d$. 易知 $(L, *)$ 是交换的 quantale 当且仅当 L 中的每个元是循环元. 如果对任意 $a \in L$ 都成立 $(a \rightarrow_r d) \rightarrow_l d = a = (a \rightarrow_l d) \rightarrow_r d$, 则称 d 为对偶的 (dualizing) [22].

定义3.3. [22] 含有对偶的循环元的 quantle 称作 Girard quantale.

Girard quantale 必然是有单位元的, 容易验证, 如果 d 是一个对偶的循环元, 则 $d \to d$ 就是一个单位元.

命题3.4. 设 d 是 *quantale* $(L, *)$ 中的对偶元, 则对任意的 $a, b, a_t \in L$, 下列式子成立:

(I8) $\bigvee(a_t \to_l d) = (\bigwedge a_t) \to_l d$; $\bigvee(a_t \to_r d) = (\bigwedge a_t) \to_r d$.

(I9) $a \to_l b = (b \to_l d) \to_r (a \to_l d)$; $a \to_r b = (b \to_r d) \to_l (a \to_r d)$.

(I10) $b * a = (a \to_r (b \to_r d)) \to_l d$; $a * b = (a \to_l (b \to_l d)) \to_r d$.

(I11) $a \to_r b = ((b \to_l d) * a) \to_r d$; $a \to_l b = (a * (b \to_r d)) \to_l d$.

(I12) $(a \to_l d) \to_r b = (b \to_r d) \to_l a$.

任给 quantale $(L, *)$, 定义 L 上的二元运算 $\bullet$ 为 $\forall a, b \in L, a \bullet b = b * a$. 则 $(L, \bullet)$ 也是一个 quantale, 称为 $(L, *)$ 的共轭 (conjugate). 在本文中, 如无特别注明, L 总是表示有单位元的 quantale, 而 L_c 表示 L 的共轭. 易见如果 L 是交换的 quantale, 则 $L_c = L$.

设 X 为一个集合, 则 $X \longrightarrow L$ 的所有映射 L^X 按逐点序构成完备格. 事实上, L^X 是一个 quantale, 其中 $*$ 和 $\to_l, \to_r$ 都按逐点定义. L^X 中的元素称作 X 的 L-子集 (L-subset). 为了今后的方便, 我们约定: 若 Y 是 X 的子集, $\lambda : Y \longrightarrow L, \mu : X \longrightarrow L$ 分别是 Y 和 X 的 L-子集, 并且 $\mu|Y = \lambda$, 当$x \notin Y$ 时 $\mu(x) = 0$, 则把 μ 和 λ 视作等同的.

对两个集合 X 和 Y, 映射 $R : X \times Y \longrightarrow L$ 称作 X 到 Y 的 L-关系 (L-relation). 每个 L-关系 $R : X \times Y \longrightarrow L$ 诱导出一个从 Y 到 X 的对偶 L-关系 (dual L-relation) R^{op}, 其定义为 $\forall x \in X, y \in Y, R^{\mathrm{op}}(y, x) = R(x, y)$.

一个 L-背景 (L-context)指三元组 (X, Y, R), 其中 X, Y 是集合, R 是 X 到 Y 的 L-关系. 同经典情形类似, X 称为对象集, Y 称为属性集, $R(x, y)$ 解释为对象 x 具有属性 y 的程度.

L-背景之间的态射有多种定义方式, 文献 [6, 8, 9, 14, 15, 19, 25, 28] 中对 $L = 2 = \{0, 1\}$ 的情形有充分的讨论. 本文中我们只关注其中一种态射, 即信息态射. L-背景之间的一个信息态射 (infomorphism) $(f, g) : (X, Y, R) \longrightarrow (A, B, S)$ 是由

一对映射 $f : X \longrightarrow A$ 和 $g : B \longrightarrow Y$ 组成, 满足 $\forall x \in X, b \in B, R(x, g(b)) = S(f(x), b)$. 由 L-背景和信息态射构成的范畴记作 L-**Ctx**.

注3.5. 按照文献 [1] 中的定义, 范畴 L-**Ctx** 就是 **Set** 的 $*$-自完备 (*-autonomous completion) $\mathbf{Set}_{\perp}$, 其中 $\perp = L$ (或等价地, L-**Ctx** 就是 Chu 空间范畴). 因此, L-**Ctx** 是完备 (complete) 和余完备 (cocomplete) 的.

§4 L-序与 L-完备格

在本节中, 我们将把 L-序与 L-完备格的概念推广到 L 为含有单位元的 quantale 的情形.

定义4.1. 集合 X 上的一个 L-序 (L-order) 是指满足如下条件的 L-关系 $P : X\times X \longrightarrow L$:

(1) 对任意 $x \in X$, 有 $I \le P(x,x)$ (自反性);

(2) 对任意 $x,y,z \in X$, 有 $P(x,y) * P(y,z) \le P(x,z)$ (传递性);

(3) 如果 $P(x,y) \ge I$ 且 $P(y,x) \ge I$, 则 $x = y$ (反对称性).

(X,P) 称作 L-序集 (L-ordered set).

在一个 L-序集 (X,P)中, $P(x,y)$ 的值可以解释为 x 小于或等于 y 的程度. 如果没有歧义, 我们把 (X,P) 简写为 X, 并用 $X(x,y)$ 代替 $P(x,y)$. 值得提醒的是, L-序集可以视作 quantale L 上的范畴 (category enriched over L) [13, 23, 24].

给定一个 L-序集 X, 定义 X 上的二元关系 $\le$ 为 $x \le y \iff X(x,y) \ge I$, 则 $\le$ 是自反的, 传递的和反对称的, 因此 $\le$ 是 X 上的一个偏序. 我们把偏序集 $(X,\le)$ 记作 X_0.

L-序集之间的映射 $f : A \longrightarrow B$ 称作 L-保序 (L-order preserving) 的, 如果对任意 $a,b \in A$ 都成立 $A(a,b) \le B(f(a),f(b))$. $f : A \longrightarrow B$ 称作 L-保序嵌入 (L-isometric), 如果对任意 $a,b \in A$ 都成立 $A(a,b) = B(f(a),f(b))$.

用 L-**Ord** 表示 L-序集和 L-保序映射组成的范畴. 易见 L-保序嵌入必定是单射, 而满的 L-保序嵌入恰好就是 L-**Ord** 中的同构态射.

例4.2. 下面列出了一些基本的 L-序集的例子.

(1) (L 上的标准 L-序) 设 $L(a,b) = a \to_r b$, 则 L 成为一个 L-序集. 类似地, L_c 是一个 L_c-序集, 其中 $L_c(a,b) = a \to_l b$.

(2) 如果 $(L,*) = ([0,\infty]^{\mathrm{op}},+)$, 则其上的 L-序集恰好是广义拟度量空间 [17].

(3) 如果 A 是 L-序集, 对任意 $a, b \in A$, 令 $A^{\text{op}}(a,b) = A(b,a)$, 则 A^{op} 是 L_c-序集, 称作 A 的对偶. 特别地, L^{op} 是 L_c-序集, 其中 $L^{\text{op}}(a,b) = a \to_l b$; L_c^{op} 是 L-序集, 其中 $L_c^{\text{op}}(a,b) = b \to_l a$.

(4) 设 A 是 L-序集, B 是 A 的子集. 则 B 也是 L-序集, 其序关系继承自 A.

(5) (离散 L-序集) 给定集合 X, 当 $x = y$ 时令 $X(x,y) = I$, 当 $x \neq y$ 时令 $X(x,y) = 0$, 则 X 是 L-序集. 这样的 L-序集称作离散的 L-序集.

(6) (L-幂集) 设 X 为一个集合. 对任意 L-子集 $\mu, \lambda \in L^X$, 令

$$L^X(\mu, \lambda) = \bigwedge_{x \in X} \mu(x) \to_r \lambda(x);$$

$$L_c^X(\mu, \lambda) = \bigwedge_{x \in X} \mu(x) \to_l \lambda(x).$$

则 L^X 是 L-序集, L_c^X 是 L_c-序集. 因此, $(L_c^X)^{\text{op}}$ 是 L-序集, 而 $(L^X)^{\text{op}}$ 是 L_c-序集.

定义4.3. 设 A 是 L-序集. 定义 $\mathbf{y} : A \longrightarrow L^A$ 和 $\mathbf{y}' : A \longrightarrow (L_c^A)^{\text{op}}$ 为

$$\mathbf{y}(x) = A(-, x); \quad \mathbf{y}'(x) = A(x, -).$$

$\mathbf{y}$ 称作 Yoneda 嵌入 (Yoneda embedding), $\mathbf{y}'$ 称作余-Yoneda 嵌入 (co-Yoneda embedding).

引理4.4. (Yoneda 引理, [13]) *设 A 为 L-序集.*

(1) 设 $\mu : A \longrightarrow L_c^{\text{op}}$ 是 L-保序映射, 则对任意 $x \in X$, $L^A(\mathbf{y}(x), \mu) = \mu(x)$.

(2) 设 $\lambda : A \longrightarrow L$ 是 L-保序映射, 则对任意 $x \in X$, $L_c^A(\mathbf{y}'(x), \lambda) = \lambda(x)$.

(3) $\mathbf{y} : A \longrightarrow L^A$ 和 $\mathbf{y}' : A \longrightarrow (L_c^A)^{\text{op}}$ 都是 L-保序嵌入.

定义4.5. 设 A 是 L-序集, $\mu \in L^A$. μ 的上界 (upper bounds) 是一个 L-子集 $\mathbf{ub}(\mu)$, 定义为

$$\mathbf{ub}(\mu)(y) = \bigwedge_{x \in A} \big(\mu(x) \to_r A(x,y)\big). \tag{4.1}$$

对偶地, μ 的下界 (lower bounds) 是一个 L-子集 $\mathbf{lb}(\mu)$, 定义为

$$\mathbf{lb}(\mu)(y) = \bigwedge_{x\in A} \big(\mu(x) \to_l A(y,x)\big). \tag{4.2}$$

如果 $\mathbf{ub}(\mu)$ 可以被某个 $a \in A$ 表示, 即

$$\mathbf{ub}(\mu)(y) = A(a,y), \tag{4.3}$$

则称 a 是 μ 的上确界 (supremum), 记作 $\sup\mu$. 对偶地, 如果 $\mathbf{lb}(\mu)$ 可以被某个 $b \in A$ 表示, 即

$$\mathbf{lb}(\mu)(y) = A(y,b), \tag{4.4}$$

则称 b 是 μ 的下确界 (infimum),记作 $\inf\mu$.

定义4.6. 如果一个 L-序集 A 的每个 L-子集 μ 有上确界和下确界, 则称 A 是 L-完备格 (complete L-lattice).

为了给出 L-完备格的一个简单刻画, 我们引入下面的概念.

定义4.7. [13, 24] 设 A 是 L-序集.

(1) 设 $a \in L, x \in A$, 如果存在 $a \otimes x \in A$ 使得对任意 $y \in A$,

$$A(a\otimes x, y) = a \to_r A(x,y), \tag{4.5}$$

我们就称 $a\otimes x$ 为 a 和 x 的张量 (tensor). A 称为张量完备的 (tensored), 如果对任意 $a \in L$ 和 $x \in A$, $a\otimes x$ 都存在.

(2) 设 $a \in L, x \in A$, 如果存在 $a \rightarrowtail x \in A$ 使得对任意 $y \in A$,

$$A(y, a\rightarrowtail x) = a \to_l A(y,x). \tag{4.6}$$

我们就称 $a \rightarrowtail x$ 为 a 和 x 的余张量 (cotensor). A 称为余张量完备的 (cotensored), 如果对任意 $a \in L$ 和 $x \in A$, $a \rightarrowtail x$ 都存在.

例4.8.

(1) 对任意 $x \in X$, $I \otimes x = I \rightarrowtail x = x$.

(2) 如果 A 是张量完备的, 则 A_0 有最小元 $\bot_A$, 并且对任意 $x \in X$, $0 \otimes x = \bot_A$.

(3) 如果 A 是余张量完备的, 则 A_0 有最大元 $\top_A$, 并且对任意 $x \in X$, $0 \rightarrowtail x = \top_A$.

定理4.9. [24] 一个 L-序集 A 是 L-完备格当且仅当

(1) A 是张量完备的,

(2) A 是余张量完备的,

(3) A_0 是完备格.

此时, 对任意 L-子集 $\mu \in L^A$,

$$\sup \mu = \bigvee_{x \in A} \big(\mu(x) \otimes x\big); \quad \inf \mu = \bigwedge_{x \in A} \big(\mu(x) \rightarrowtail x\big),$$

其中 $\bigvee$ 和 $\bigwedge$ 分别表示完备格 A_0 中的并 *(join)* 和交 *(meet)*.

例4.10. 对任意集合 X, L-幂集 L^X 和 $(L_c^X)^{\mathrm{op}}$ 是 L-完备格. 对 $a \in L, \mu \in L^X$,

$$a \otimes \mu = \mu * a; \quad a \rightarrowtail \mu = a \to_l \mu. \tag{4.7}$$

因此, 给定 L-子集 $\mathcal{U} : L^X \longrightarrow L$,

$$\sup \mathcal{U} = \bigvee_{\mu \in L^X} \big(\mu * \mathcal{U}(\mu)\big), \quad \inf \mathcal{U} = \bigwedge_{\mu \in L^X} \big(\mathcal{U}(\mu) \to_l \mu\big). \tag{4.8}$$

对 $a \in L, \mu \in (L_c^X)^{\mathrm{op}}$,

$$a \otimes \mu = a \to_r \mu; \quad a \rightarrowtail \mu = a * \mu. \tag{4.9}$$

定义4.11. [13] 一对 L-保序映射 $f : A \longrightarrow B$ 和 $g : B \longrightarrow A$ 称作 L-伴随 (L-adjunction) (记作 $f \vdash g : A \rightharpoonup B$), 如果 $B(f(x), y) = A(x, g(y))$ 对所有 $x \in A, y \in B$ 成立. 此时, f 称作 g 的左伴 (left adjoint), g 称作 f 的右伴 (right adjoint).

例4.12. (1) 对任意集合 X, Y 和映射 $f : X \longrightarrow Y$, $f^{\to} \vdash f^{\leftarrow} : L^X \rightharpoonup L^Y$, 其中 $f^{\to} : L^X \longrightarrow L^Y$ 和 $f^{\leftarrow} : L^Y \longrightarrow L^X$ 定义为 $f^{\to}(\mu)(y) = \bigvee_{f(x)=y} \mu(x)$ 以及 $f^{\leftarrow}(\lambda)(x) = \lambda(f(x))$.

(2) 对任意 L-序集 A, $\mathbf{ub} \vdash \mathbf{lb} : L^A \rightharpoonup (L_c^A)^{\mathrm{op}}$.

(3) 设 A 是 L-完备格, 则 $\sup \vdash \mathbf{y} : L^A \rightharpoonup A$ 且 $\mathbf{y}' \vdash \inf : A \rightharpoonup (L_c^A)^{\mathrm{op}}$.

(4) 设 A 是 L-序集, $x \in A$. 若 A 是张量完备的, 则 $(-) \otimes x \vdash A(x, -) : L \rightharpoonup A$; 若 A 是余张量完备的, 则 $A(-, x) \vdash (-) \rightarrowtail x : A \rightharpoonup L_c^{\mathrm{op}}$.

如果 L-序集 A 的每个 L-子集都有下确界, 则我们可以验证下图交换:

$$\begin{tikzcd} L^A \arrow[rr, shift right, "\mathbf{ub}"'] \arrow[dr, shift right, "\sup"'] & & (L_c^A)^{\mathrm{op}} \arrow[ll, shift right, "\mathbf{lb}"'] \arrow[dl, shift left, "\inf"] \\ & A \arrow[ul, shift right, "\mathbf{y}"'] \arrow[ur, shift left, "\mathbf{y}'"] & \end{tikzcd} \tag{4.10}$$

因此我们有下面的命题:

命题4.13. [23, 24] *对每个 L-序集 A, 下列命题等价.*

(1) *A 是 L-完备格.*

(2) *A 的每个 L-子集有上确界.*

(3) *A 的每个 L-子集有下确界.*

(4) *$\mathbf{y}$ 有左伴 $\sup : L^A \longrightarrow A$.*

(5) *$\mathbf{y}'$ 有右伴 $\inf : (L_c^A)^{\mathrm{op}} \longrightarrow A$.*

下面的命题是文献 [16] 中相关命题的推广, 证明方法是类似的, 故本文不再赘述.

命题4.14. [16] *设 A, B 是 L-完备格, $f : A \longrightarrow B$ 是映射, 则以下命题等价:*

(1) *$f : A \longrightarrow B$ 是 L-保序的;*

(2) *$f : A_0 \longrightarrow B_0$ 是保序的, 并且对任意 $a \in L$ 和 $x \in A$ 有 $a \otimes_B f(x) \leq f(a \otimes_A x)$;*

(3) $f: A_0 \longrightarrow B_0$ 是保序的, 并且对任意 $a \in L$ 和 $x \in A$ 有 $f(a \rightarrowtail_A x) \leq a \rightarrowtail_B f(x)$.

命题4.15. [16, 24] 设 A, B 是 L-完备格, $f: A \longrightarrow B$ 是映射, 则

(1) $f: A \longrightarrow B$ 是左伴当且仅当 $f: A_0 \longrightarrow B_0$ 保并, 同时 f 保张量, 即对任意 $a \in L$ 和 $x \in A$ 有 $f(a \otimes_A x) = a \otimes_B f(x)$.

(2) $f: A \longrightarrow B$ 是右伴当且仅当 $f: A_0 \longrightarrow B_0$ 保交, 同时 f 保余张量, 即对任意 $a \in L$ 和 $x \in A$ 有 $f(a \rightarrowtail_A x) = a \rightarrowtail_B f(x)$.

设 A 是 L-完备格, $x \in A$. 注意到 $A(x, -): A \longrightarrow L$ 是右伴, 而 $A(-, x): A \longrightarrow L_c^{\mathrm{op}}$ 是左伴, 因此对任意子集 $\{y_i : i \in I\} \subseteq A$,

$$A\Big(x, \bigwedge_{i \in I} y_i\Big) = \bigwedge_{i \in I} A(x, y_i); \quad A\Big(\bigvee_{i \in I} y_i, x\Big) = \bigwedge_{i \in I} A(y_i, x), \tag{4.11}$$

其中 $\bigvee$ 和 $\bigwedge$ 分别表示 A_0 中的并和交.

推论4.16. 设 A, B 是 L-完备格, $f: A \longrightarrow B$ 是映射, 则

(1) $f: A \longrightarrow B$ 是左伴当且仅当 f 保上确界, 即对任意 $\mu \in L^A$ 有 $f(\sup_A \mu) = \sup_B f^{\rightarrow}(\mu)$.

(2) $f: A \longrightarrow B$ 是右伴当且仅当 f 保下确界, 即对任意 $\mu \in L^A$ 有 $f(\inf_A \mu) = \inf_B f^{\rightarrow}(\mu)$.

我们把 L-完备格和保上确界的映射 (即左伴) 构成的范畴记作 L-**Sup**.

§5 L-闭包空间

文献 [3, 16] 中关于 L-闭包 (内部) 算子和 L-闭包 (内部) 系统的定义可以自然地推广到 L 是有单位元的 quantale 的情形.

定义5.1. 设 A 为 L-序集.

(1) 一个 L-保序映射 $c : A \longrightarrow A$ 称作 L-闭包算子 (L-closure operator), 如果

(C1) 对任意 $x \in A$, $A(x, c(x)) \geq I$, 即 $x \leq c(x)$ 在 A_0 中恒成立;

(C2) $c \circ c = c$.

(2) 一个 L-保序映射 $o : A \longrightarrow A$ 称作 L-内部算子 (L-opening operator), 如果

(O1) 对任意 $x \in A$, $A(o(x), x) \geq I$, 即 $o(x) \leq x$ 在 A_0 中恒成立;

(O2) $o \circ o = o$.

例5.2. 设 A, B 为 L-序集, $f \vdash g : A \rightharpoonup B$ 为 L-伴随. 则 $g \circ f : A \longrightarrow A$ 是 L-闭包算子, $f \circ g : B \longrightarrow B$ 是 L-内部算子.

定义5.3. 设 A 是 L-完备格, A 中的张量和余张量分别用 $\otimes$ 和 $\rightarrowtail$ 表示.

(1) 子集 $\mathcal{C} \subseteq A$ 称作 A 的 L-闭包系统 (L-closure system), 如果

(i) 对任意子集 $\{x_t\}_{t\in T} \subseteq \mathcal{C}$, $\{x_t\}_{t\in T}$ 在 A_0 中的交 $\bigwedge_{t\in T} x_t$ 在 $\mathcal{C}$ 中;

(ii) 对任意 $x \in \mathcal{C}$ 和 $a \in L$, 余张量 $a \rightarrowtail x$ 在 $\mathcal{C}$ 中.

(2) 子集 $\mathcal{O} \subseteq A$ 称作 A 的 L-内部系统 (L-opening system), 如果

(i) 对任意子集 $\{x_t\}_{t\in T} \subseteq \mathcal{O}$, $\{x_t\}_{t\in T}$ 在 A_0 中的并 $\bigvee_{t\in T} x_t$ 在 $\mathcal{O}$ 中;

(ii) 对任意 $x \in \mathcal{O}$ 和 $a \in L$, 张量 $a \otimes x$ 在 $\mathcal{O}$ 中.

下面的命题揭示了 L-闭包算子和 L-闭包系统的联系, 其证明与文献 [16] 中 L 是完备剩余格的情形类似.

命题5.4. *设 A 为 L-完备格, $\mathcal{C}$ 为 A 的子集, 则下列命题等价:*

(1) $\mathcal{C}$ 是 A 的 L-闭包系统.

(2) 含入映射 $i:\mathcal{C}\longrightarrow A$ 是右伴.

(3) 存在 L-闭包算子 $c:A\longrightarrow A$ 使得 $\mathcal{C}=c(A)$.

上面的命题建立了 L-闭包算子和 L-闭包系统之间的一个双射. 确切地说, 给定一个 L-闭包算子 $c:A\longrightarrow A$, 其不动点集 $c(A)$ 是 A 的 L-闭包系统. 反之, 给定 L-闭包系统 $\mathcal{C}\subseteq A$, $c=i\circ h$ 就是 A 上的 L-闭包算子, 其中 h 是含入映射 $i:\mathcal{C}\longrightarrow A$ 的左伴. 特别地, L-闭包算子 $c:A\longrightarrow A$ 诱导出一对 L-伴随 $c\vdash i:A\rightharpoonup c(A)$, 其中 i 是含入映射.

类似地, L-内部算子和 L-内部系统也有下面的联系.

命题5.5. 设 A 为 L-完备格, $\mathcal{O}$ 为 A 的子集, 则下列命题等价:

(1) $\mathcal{O}$ 是 A 的 L-内部系统.

(2) 含入映射 $i:\mathcal{O}\longrightarrow A$ 是左伴.

(3) 存在 L-内部算子 $o:A\longrightarrow A$ 使得 $\mathcal{O}=o(A)$.

设 A 是 L-完备格, $\rightarrowtail$ 为 A 中的余张量. 则任意 L-闭包算子 $c:A\longrightarrow A$ 的不动点集 $c(A)$ 关于余张量和 A_0 中的交是闭的, 故 $c(A)$ 本身也是 L-完备格. 任给 L-子集 $\mu:c(A)\longrightarrow L$, μ 在 $c(A)$ 中的下确界与它在 A 中的下确界相同 (即 $\inf_{c(A)}\mu=\bigwedge_{x\in c(A)}\mu(x)\rightarrowtail x$), 而 μ 在 $c(A)$ 中的上确界 $\sup_{c(A)}\mu=c(\sup_A\mu)$.

类似地, 任意 L-内部算子 $o:A\longrightarrow A$ 的不动点集 $o(A)$ 也是 L-完备格.

定义5.6. 一个 L-闭包空间 (L-closure space) 是一个二元组 (X,c), 其中 X 是一个集合, $c:L^X\longrightarrow L^X$ 是一个 L-闭包算子. L-闭包空间之间的连续映射 $f:(X,c)\longrightarrow(Y,d)$ 是一个满足 $\forall\mu\in L^X, f^{\rightarrow}\circ c(\mu)\leq d\circ f^{\rightarrow}(\mu)$ 的映射 $f:X\longrightarrow Y$.

我们把 L-闭包空间和连续映射构成的范畴记作 L-**Cls**.

§6 L-背景, L-完备格与 L-闭包空间的范畴联系

§6.1 L-闭包空间与 L-完备格之间的一对伴随

设 (X,c) 为 L-闭包空间. 一个 L-子集 $\mu \in L^X$ 称作闭的 (closed), 如果 $c(\mu)=\mu$. 由于 L^X 是 L-完备格, (X,c) 的所有 L-闭子集 $c(L^X)$ 也构成一个 L-完备格.

引理6.1. *L-闭包空间之间的映射 $f:(X,c)\longrightarrow(Y,d)$ 是连续的当且仅当 $\lambda \in d(L^Y)$ 蕴含 $f^{\leftarrow}(\lambda)\in c(L^X)$.*

证明: 设 f 连续, $\lambda\in d(L^Y)$, 则

$$f^{\rightarrow}\circ c\circ f^{\leftarrow}(\lambda)\le d\circ f^{\rightarrow}\circ f^{\leftarrow}(\lambda)\le d(\lambda)=\lambda.$$

于是 $c\circ f^{\leftarrow}(\lambda)\le f^{\leftarrow}(\lambda)$, 从而 $f^{\leftarrow}(\lambda)\in c(L^X)$.

反之, 设 $f^{\leftarrow}(\lambda)\in c(L^X)$ 对任意 $\lambda\in d(L^Y)$ 成立. 则任给 $\mu\in L^X$, 有 $f^{\leftarrow}\circ d\circ f^{\rightarrow}(\mu)\in c(L^X)$. 由 $\mu\le f^{\leftarrow}\circ f^{\rightarrow}(\mu)\le f^{\leftarrow}\circ d\circ f^{\rightarrow}(\mu)$, 就得到 $c(\mu)\le f^{\leftarrow}\circ d\circ f^{\rightarrow}(\mu)$, 因此 $f^{\rightarrow}\circ c(\mu)\le d\circ f^{\rightarrow}(\mu)$. □

给定 L-闭包空间之间的连续映射 $f:(X,c)\longrightarrow(Y,d)$, 定义一对映射

$$f_*:c(L^X)\longrightarrow d(L^Y),\quad f^*:d(L^Y)\longrightarrow c(L^X)$$

为

$$f_*(\mu)=d\circ f^{\rightarrow}(\mu),\quad f^*(\lambda)=f^{\leftarrow}(\lambda),$$

其中 $\mu\in c(L^X)$, $\lambda\in d(L^Y)$.

命题6.2. *若 $f:(X,c)\longrightarrow(Y,d)$ 是 L-闭包空间之间的连续映射, 则 $f_*\dashv f^*: c(L^X)\rightharpoonup d(L^Y)$.*

证明: 由于 $f^{\rightarrow}\dashv f^{\leftarrow}:L^X\rightharpoonup L^Y$, 我们只需要证明 $L^Y\big(d\circ f^{\rightarrow}(\mu),\lambda\big)=L^Y\big(f^{\rightarrow}(\mu),\lambda\big)$ 对任意 $\mu\in c(L^X)$ 和 $\lambda\in d(L^Y)$ 成立. 事实上, 由 d 是 L-保序的可知 $L^Y\big(f^{\rightarrow}(\mu),\lambda\big)\le L^Y\big(d\circ f^{\rightarrow}(\mu),\lambda\big)$, 而反向的不等关系由 (4.11) 以及 d 是 L-闭包算子立得. □

从上面的命题可以得到一个函子 (functor)

$$T : L\text{-}\mathbf{Cls} \longrightarrow L\text{-}\mathbf{Sup},$$

它把每个连续的 $f:(X,c)\longrightarrow(Y,d)$ 映到 $f_*:c(L^X)\longrightarrow d(L^Y)$.

设 A 为 L-完备格, 则 $c_A=\mathbf{y}\circ\sup : L^A\longrightarrow A\longrightarrow L^A$ 为 L-闭包算子, 因此 (A,c_A) 是 L-闭包空间.

命题6.3. *设 A,B 为 L-完备格, $f:A\longrightarrow B$ 为左伴. 则 $f:(A,c_A)\longrightarrow(B,c_B)$ 是连续映射.*

证明: 由 f 保上确界 (推论 4.16) 可知

$$\begin{aligned} f^{\rightarrow}\circ c_A(\mu)(b) &= \bigvee_{f(a)=b} c_A(\mu)(a) \\ &= \bigvee_{f(a)=b} A(a,\sup\mu) \\ &\leq \bigvee_{f(a)=b} B\big(f(a),f(\sup\mu)\big) \\ &= B\big(b,\sup f^{\rightarrow}(\mu)\big) \\ &= c_B\circ f^{\rightarrow}(\mu)(b) \end{aligned}$$

对任意 $\mu\in L^A$ 和 $b\in B$成立, 因此 $f:(A,c_A)\longrightarrow(B,c_B)$ 是连续的. □

从上面的命题我们又得到一个函子 $D : L\text{-}\mathbf{Sup}\longrightarrow L\text{-}\mathbf{Cls}$.

命题6.4. *函子 $T\circ D$ 与 L-**Sup** 上的恒等函子自然同构. 特别地, 对每个 L-完备格 A, A 与 $T\circ D(A)$同构.*

证明: 对任意 $a\in A$, 由 $\mathbf{y}(a)=\mathbf{y}\circ\sup\circ\mathbf{y}(a)=c_A\circ\mathbf{y}(a)$ 可知 $\mathbf{y}(a)$ 是 (A,c_A) 的 L-闭子集. 由 Yoneda 引理, $a\mapsto\mathbf{y}(a)$ 定义了一个 L-保序嵌入 $\nu_A : A\longrightarrow T\circ D(A)(=c_A(L^A))$. 显然 ν_A 是满射, 因此是同构. 事实上, $\{\nu_A\}$ 就是 L-**Sup** 上的恒等函子到 $T\circ D$ 的自然同构, 具体证明留给读者. □

定理6.5. *$T : L\text{-}\mathbf{Cls}\longrightarrow L\text{-}\mathbf{Sup}$ 是 $D : L\text{-}\mathbf{Sup}\longrightarrow L\text{-}\mathbf{Cls}$ 的左伴.*

证明: 给定 L-闭包空间 (X,c), 记 A 为 X 的所有 L-闭子集组成的 L-完备格 $c(L^X)$, 则 $D\circ T(X,c)=(A,c_A)$. 定义 $\eta_{(X,c)}:X\longrightarrow A$ 为 $\eta_{(X,c)}(x)=c(I_x)$, 其中 $I_x\in L^X$ 满足 $I_x(x)=I$, 而只要 $y\neq x$ 就有 $I_x(y)=0$.

下面我们将证明 $\eta=\{\eta_{(X,c)}\}$ 是 L-**Cls** 上的恒等函子到 $D\circ T$ 的自然变换, 从而是所需证明的伴随的单位.

第 1 步. $\eta_{(X,c)}:(X,c)\longrightarrow(A,c_A)$ 是连续的, 即 $\eta^{\rightarrow}_{(X,c)}\circ c(\mu)\leq c_A\circ\eta^{\rightarrow}_{(X,c)}(\mu)$ 对任意 $\mu\in L^X$ 成立.

首先, 我们证明 $c(\mu)=\sup_A\circ\eta^{\rightarrow}_{(X,c)}(\mu)$ 对任意 $\mu\in L^X$ 成立. 考虑下图

$$\begin{tikzcd} L^X \arrow[r, "k^{\rightarrow}"] \arrow[dr, "\eta^{\rightarrow}_{(X,c)}"'] & L^{L^X} \arrow[r, "\sup"] \arrow[d, "c^{\rightarrow}"] & L^X \arrow[d, "c"] \\ & L^A \arrow[r, "\sup_A"'] & A \end{tikzcd}$$

其中 $k:X\longrightarrow L^X$ 定义为 $k(x)=I_x, x\in X$, 而 sup 是 L-完备格 L^X 中的上确界算子. 左边的三角图的交换性由 $\eta_{(X,c)}=c\circ k$ 可得. 又因 $c:L^X\longrightarrow A$ 是左伴, 它是保上确界的, 从而右边的四方图交换. 因此整个图交换. 对每个 $\mu\in L^X$, 我们有

$$\sup\circ k^{\rightarrow}(\mu)=\bigvee_{\lambda\in L^X}\lambda*k^{\rightarrow}(\mu)(\lambda)=\bigvee_{x\in X}I_x*\mu(x)=\mu.$$

从而对任意 $\mu\in L^X$ 成立 $c(\mu)=\sup_A\circ\eta^{\rightarrow}_{(X,c)}(\mu)$.

其次, 我们证明 $\eta^{\rightarrow}_{(X,c)}(\mu)\leq\mathbf{y}_A(\mu)$ 对每个 (X,c) 中的 L-闭子集 μ 成立. 设 $\lambda\in A$, 由定义得 $\eta^{\rightarrow}_{(X,c)}(\mu)(\lambda)=\bigvee_{\eta_{(X,c)}(x)=\lambda}\mu(x)$. 如果 $\lambda=\eta_{(X,c)}(x)=c(I_x)$, 则由 c 是 L-保序的可得

$$\mu(x)=L^X(I_x,\mu)\leq A(\lambda,\mu)=\mathbf{y}_A(\mu)(\lambda).$$

于是, $\eta^{\rightarrow}_{(X,c)}(\mu)\leq\mathbf{y}_A(\mu)$.

因此,

$$\eta^{\rightarrow}_{(X,c)}\circ c(\mu)\leq\mathbf{y}_A\circ\sup_A\circ\eta^{\rightarrow}_{(X,c)}(\mu)=c_A\circ\eta^{\rightarrow}_{(X,c)}(\mu).$$

第 2 步. $\eta=\{\eta_{(X,c)}\}$ 是自然变换. 设 $f:(X,c)\longrightarrow(Y,d)$ 为连续映射, 我们要证明对任意 $x\in X$,

$$d(I_{f(x)})=\eta_{(Y,d)}\circ f(x)=(D\circ T)(f)\circ\eta_{(X,c)}(x)=d\circ f^{\rightarrow}(c(I_x)).$$

一方面, 由 $I_{f(x)} = f^{\to}(I_x) \le f^{\to}(c(I_x))$ 得 $d(I_{f(x)}) \le d \circ f^{\to}(c(I_x))$. 另一方面, 由于 f 是连续的, $f^{\to}(c(I_x)) \le d \circ f^{\to}(I_x) = d(I_{f(x)})$, 因此 $d \circ f^{\to}(c(I_x)) \le d(I_{f(x)})$.

第 3 步. $\eta_{(X,c)} : (X, c) \longrightarrow (A, c_A)$ 具有泛性, 即对任意 L-完备格 B 和连续映射 $f : (X, c) \longrightarrow (B, c_B)$, 存在唯一的左伴 $\overline{f} : A \longrightarrow B$ 使得下面的图交换:

$$\begin{tikzcd}
(X,c) \arrow[r, "\eta_{(X,c)}"] \arrow[dr, "f"'] & (A,c_A) \arrow[d, "\overline{f}"] \\
& (B,c_B)
\end{tikzcd}$$

存在性. 对任意 $\mu \in A$, 设 $\overline{f}(\mu) = \sup_B \circ f^{\to}(\mu) = \bigvee_{x\in X} \mu(x) \otimes_B f(x)$. 换句话说, $\overline{f} : A \longrightarrow B$ 是下列 L-保序映射的复合

$$A \hookrightarrow L^X \xrightarrow{f^{\to}} L^B \xrightarrow{\sup_B} B.$$

我们断言 $\overline{f}$ 满足要求.

首先, 我们证明 $\overline{f} : A \longrightarrow B$ 是左伴. 事实上, $\overline{f}$ 有右伴 $g : B \longrightarrow A$, 其定义为 $g(b) = f^*(\mathbf{y}_B(b))$. 由命题 6.4, 任给 $b \in B$, $\mathbf{y}_B(b)$ 是 (B, c_B) 中的 L-闭子集, 故 g 是良定义的. 对任意 $\mu \in A$ 和 $b \in B$,

$$\begin{aligned}
B\big(\overline{f}(\mu), b\big) &= \bigwedge_{y\in B} \Big(f^{\to}(\mu)(y) \to_r B(y,b)\Big) \quad (4.3)\\
&= \bigwedge_{y\in B} \Big(\bigvee_{f(x)=y} \mu(x) \to_r B(y,b)\Big)\\
&= \bigwedge_{y\in B} \bigwedge_{f(x)=y} \Big(\mu(x) \to_r B(y,b)\Big)\\
&= \bigwedge_{x\in X} \Big(\mu(x) \to_r B(f(x),b)\Big)\\
&= \bigwedge_{x\in X} \Big(\mu(x) \to_r \mathbf{y}_B(b)(f(x))\Big)\\
&= L^X\big(\mu, f^* \circ \mathbf{y}_B(b)\big)\\
&= A\big(\mu, g(b)\big).
\end{aligned}$$

因此 $\overline{f} \vdash g : A \rightharpoonup B$, $\overline{f}$ 是左伴.

其次, 我们证明 $\overline{f}\circ\eta_{(X,c)}(x)=f(x)$ 对任意 $x\in X$ 成立. 由 $f:(X,c)\longrightarrow(B,c_B)$ 的连续性可知对任意 $x\in X$,

$$f^{\rightarrow}\circ c(I_x)\leq c_B\circ f^{\rightarrow}(I_x)=\mathbf{y}_B\circ\sup\nolimits_B I_{f(x)}=\mathbf{y}_B(f(x)),$$

于是对任意 $x,y\in X$,

$$c(I_x)(y)\leq f^{\leftarrow}\circ\mathbf{y}_B(f(x))(y)=B(f(y),f(x)),$$

从而对任意 $x,y\in X$ 和 $b\in B$,

$$c(I_x)(y)*B(f(x),b)\leq B(f(y),f(x))*B(f(x),b)\leq B(f(y),b).$$

因此,

$$\begin{aligned}B(f(x),b)&=\bigwedge_{y\in X}\Big(c(I_x)(y)\rightarrow_r B(f(y),b)\Big)\\&=L^X\big(c(I_x),f^{\leftarrow}\circ\mathbf{y}_B(b)\big)\\&=L^B\big(f^{\rightarrow}\circ c(I_x),\mathbf{y}_B(b)\big)\\&=B\big(\sup\nolimits_B\circ f^{\rightarrow}\circ c(I_x),b\big)\quad(4.3)\\&=B\big(\overline{f}\circ\eta_{(X,c)}(x),b\big)\end{aligned}$$

对任意 $x\in X$ 和 $b\in B$ 成立, 故 $\overline{f}\circ\eta_{(X,c)}=f$.

唯一性. 假设 $h:A\longrightarrow B$ 是另一个使上图交换的左伴. 对任意 $\mu\in A$, 由

$$\mu=c(\mu)=c\Big(\bigvee_{x\in X}I_x*\mu(x)\Big)=\bigvee_{x\in X}\mu(x)\otimes_A c(I_x)$$

可得

$$\begin{aligned}h(\mu)&=h\Big(\bigvee_{x\in X}\mu(x)\otimes_A c(I_x)\Big)\\&=\bigvee_{x\in X}\mu(x)\otimes_B\big(h\circ\eta_{(X,c)}(x)\big)\\&=\bigvee_{x\in X}\mu(x)\otimes_B f(x)\\&=\overline{f}(\mu).\end{aligned}$$

因此 $h=\overline{f}$. □

§6.2 L-闭包空间与 L-背景之间的一对伴随

设 (X,Y,R) 为 L-背景, 定义一对算子

$$R_{\uparrow}: L^X \longrightarrow L^Y; \qquad R^{\downarrow}: L^Y \longrightarrow L^X$$

如下

$$R_{\uparrow}(\mu)(y) = \bigwedge_{x\in X} \big(\mu(x) \to_r R(x,y)\big); \qquad R^{\downarrow}(\lambda)(x) = \bigwedge_{y\in Y} \big(\lambda(y) \to_l R(x,y)\big).$$

易见对任意 $\mu \in L^X$ 和 $\lambda \in L^Y$ 有

$$(L_c^Y)^{\mathrm{op}}\big(R_{\uparrow}(\mu),\lambda\big) = L^X\big(\mu, R^{\downarrow}(\lambda)\big),$$

因此

$$R_{\uparrow} \vdash R^{\downarrow} : L^X \rightharpoonup (L_c^Y)^{\mathrm{op}}$$

是一对 L-伴随[1]. 故 $R^{\downarrow}\circ R_{\uparrow}: L^X \longrightarrow L^X$ 是 L-闭包算子, 而 $R_{\uparrow}\circ R^{\downarrow}: (L_c^Y)^{\mathrm{op}} \longrightarrow (L_c^Y)^{\mathrm{op}}$ 是 L-内部算子.

命题6.6. 设 $(f,g): (X,Y,R) \longrightarrow (A,B,S)$ 为 L-背景之间的信息态射, 则 $f: (X, R^{\downarrow}\circ R_{\uparrow}) \longrightarrow (A, S^{\downarrow}\circ S_{\uparrow})$ 是连续的.

证明: 考虑下图:

$$\begin{tikzcd}
L^X \arrow[r, "R_{\uparrow}"] \arrow[d, "f^{\to}"'] & L^Y \arrow[r, "R^{\downarrow}"] \arrow[d, "g^{\leftarrow}"] & L^X \arrow[d, "f^{\to}"] \\
L^A \arrow[r, "S_{\uparrow}"'] & L^B \arrow[r, "S^{\downarrow}"'] & L^A
\end{tikzcd} \tag{6.1}$$

我们要证明 $f^{\to}\circ R^{\downarrow}\circ R_{\uparrow}(\mu) \le S^{\downarrow}\circ S_{\uparrow}\circ f^{\to}(\mu)$ 对任意 $\mu \in L^X$ 成立. 这个结论包含在下面两个引理中. □

引理6.7. 图 (6.1) 的左半部分交换当且仅当 $(f,g): (X,Y,R) \longrightarrow (A,B,S)$ 是信息态射.

[1] 当 L 为完备剩余格 (complete residuated lattice) 时, Bělohlávek 首先引入了这对算子并称之为模糊 Galois 联络 (fuzzy Galois connection) [2, 4].

证明: 必要性容易得到, 因为对任意 $x \in X, b \in B$,

$$\begin{aligned} R(x, g(b)) &= R_{\uparrow}(I_x)(g(b)) \\ &= g^{\leftarrow}\big(R_{\uparrow}(I_x)\big)(b) \\ &= S_{\uparrow}\big(f^{\rightarrow}(I_x)\big)(b) \\ &= S_{\uparrow}(I_{f(x)})(b) \\ &= S(f(x), b). \end{aligned}$$

为证充分性, 注意到

$$\begin{aligned} g^{\leftarrow} \circ R_{\uparrow}(\mu)(b) &= R_{\uparrow}(\mu)(g(b)) \\ &= \bigwedge_{x \in X} \Big(\mu(x) \rightarrow_r R(x, g(b))\Big) \\ &= \bigwedge_{x \in X} \Big(\mu(x) \rightarrow_r S(f(x), b)\Big) \\ &= \bigwedge_{a \in A} \Big(\bigvee_{f(x)=a} \mu(x) \rightarrow_r S(a, b)\Big) \\ &= \bigwedge_{a \in A} \Big(f^{\rightarrow}(\mu)(a) \rightarrow_r S(a, b)\Big) \\ &= S_{\uparrow} \circ f^{\rightarrow}(\mu)(b) \end{aligned}$$

对任意 $\mu \in L^X$ 和 $b \in B$ 成立, 故得证. □

引理6.8. *考虑图 (6.1) 的右半部分, 则 $f^{\rightarrow} \circ R^{\downarrow} \leq S^{\downarrow} \circ g^{\leftarrow}$ 当且仅当 $R(x, g(b)) \leq S(f(x), b)$ 对任意 $x \in X, b \in B$ 成立.*

证明: 必要性容易得到, 因为对任意 $x \in X, b \in B$,

$$\begin{aligned} R(x, g(b)) &= R^{\downarrow}(I_{g(b)})(x) \\ &\leq f^{\rightarrow} \circ R^{\downarrow}(I_{g(b)})(f(x)) \\ &\leq S^{\downarrow} \circ g^{\leftarrow}(I_{g(b)})(f(x)) \\ &\leq S(f(x), b). \end{aligned}$$

为证充分性, 对任意 $\lambda \in L^Y$ 和 $a \in A$, 我们有

$$\begin{aligned}
f^{\rightarrow} \circ R^{\downarrow}(\lambda)(a) &= \bigvee_{f(x)=a} R^{\downarrow}(\lambda)(x) \\
&= \bigvee_{f(x)=a} \bigwedge_{y\in Y} \Big(\lambda(y) \rightarrow_l R(x,y)\Big) \\
&\leq \bigvee_{f(x)=a} \bigwedge_{b\in B} \Big(\lambda(g(b)) \rightarrow_l R(x,g(b))\Big) \\
&\leq \bigvee_{f(x)=a} \bigwedge_{b\in B} \Big(\lambda(g(b)) \rightarrow_l S(f(x),b)\Big) \\
&= \bigwedge_{b\in B} \Big(\lambda(g(b)) \rightarrow_l S(a,b)\Big) \\
&= \bigwedge_{b\in B} \Big(g^{\leftarrow}(\lambda)(b) \rightarrow_l S(a,b)\Big) \\
&= S^{\downarrow} \circ g^{\leftarrow}(\lambda)(a),
\end{aligned}$$

因此所需结论成立. □

由命题 6.6, 我们得到一个函子 $U : L\text{-}\mathbf{Ctx} \longrightarrow L\text{-}\mathbf{Cls}$, 它将每个信息态射

$$(f,g) : (X,Y,R) \longrightarrow (A,B,S)$$

变为连续映射

$$f : (X, R^{\downarrow} \circ R_{\uparrow}) \longrightarrow (A, S^{\downarrow} \circ S_{\uparrow}).$$

给定 L-闭包空间之间的连续映射 $f : (X,c) \longrightarrow (Y,d)$, 用 $c(L^X)$ 和 $d(L^Y)$ 分别表示 X 和 Y 的 L-闭子集. 考虑把每个 Y 的 L-闭子集 λ 映到 $f^*(\lambda) = f^{\leftarrow}(\lambda)$ 的 $f^* : d(L^Y) \longrightarrow c(L^X)$, 则我们有下面的命题.

命题6.9. $(f, f^*) : (X, c(L^X), R) \longrightarrow (Y, d(L^Y), S)$ 是信息态射, 其中对 $x \in X$ 和 $\mu \in c(L^X)$ 有 $R(x,\mu) = \mu(x)$, 对 $y \in Y$ 和 $\lambda \in d(L^Y)$ 有 $S(y,\lambda) = \lambda(y)$.

证明: 对任意 $x \in X$ 和 $\lambda \in d(L^Y)$, 我们有

$$R(x, f^*(\lambda)) = f^*(\lambda)(x) = f^{\leftarrow}(\lambda)(x) = \lambda(f(x)) = S(f(x), \lambda),$$

故命题得证. □

从上面的命题我们得到一个函子

$$F : L\text{-}\mathbf{Cls} \longrightarrow L\text{-}\mathbf{Ctx},$$

它把每个连续的 $f : (X, c) \longrightarrow (Y, d)$ 映到信息态射

$$(f, f^*) : (X, c(L^X), R) \longrightarrow (Y, d(L^Y), S).$$

引理6.10. 对任意 L-闭包空间 (X, c), $U \circ F(X, c) = (X, c)$.

证明: 由函子 F 的定义, $F(X, c)$ 为 L-背景 $(X, c(L^X), R)$, 其中对 $x \in X$ 和 $\mu \in c(L^X)$ 有 $R(x, \mu) = \mu(x)$. 我们需要证明 $c = R^{\downarrow} \circ R_{\uparrow}$. 由于 $R^{\downarrow} \circ R_{\uparrow}$ 是 L-闭包算子, 只需证明对任意 $\mu \in L^X$, $c(\mu) = \mu$ 当且仅当 $R^{\downarrow} \circ R_{\uparrow}(\mu) = \mu$.

设 $c(\mu) = \mu$, 则对任意 $x \in X$,

$$\begin{aligned} R^{\downarrow} \circ R_{\uparrow}(\mu)(x) &= \bigwedge_{\phi \in c(L^X)} \Big(\big(\bigwedge_{z \in X} \mu(z) \rightarrow_r R(z, \phi) \big) \rightarrow_l R(x, \phi) \Big) \\ &= \bigwedge_{\phi \in c(L^X)} \Big(\big(\bigwedge_{z \in X} \mu(z) \rightarrow_r \phi(z) \big) \rightarrow_l \phi(x) \Big) \\ &\leq \Big(\bigwedge_{z \in X} \mu(z) \rightarrow_r \mu(z) \Big) \rightarrow_l \mu(x) \\ &\leq \mu(x), \end{aligned}$$

故 $\mu \geq R^{\downarrow} \circ R_{\uparrow}(\mu)$. 而反向的不等式 $\mu \leq R^{\downarrow} \circ R_{\uparrow}(\mu)$ 由 $R^{\downarrow} \circ R_{\uparrow}$ 是 L-闭包算子立得. 因此, $\mu = R^{\downarrow} \circ R_{\uparrow}(\mu)$.

反之, 设 $R^{\downarrow} \circ R_{\uparrow}(\mu) = \mu$. 则

$$\mu = R^{\downarrow}(R_{\uparrow}(\mu)) = \bigwedge_{\phi \in c(L^X)} \big(R_{\uparrow}(\mu)(\phi) \rightarrow_l \phi \big).$$

由于 $c(L^X)$ 对 L^X 中的交和余张量封闭, 我们得到

$$\bigwedge_{\phi \in c(L^X)} \big(R_{\uparrow}(\mu)(\phi) \rightarrow_l \phi \big) \in c(L^X),$$

因此 $\mu \in c(L^X)$, 从而 $c(\mu) = \mu$. □

定理6.11. $F : L\text{-}\mathbf{Cls} \longrightarrow L\text{-}\mathbf{Ctx}$ 是 $U : L\text{-}\mathbf{Ctx} \longrightarrow L\text{-}\mathbf{Cls}$ 的左伴.

证明: 由上面的引理, 对 L-闭包空间 (X,c), $\mathrm{id}_X:(X,c)\longrightarrow U\circ F(X,c)$ 显然是连续的, 而 $\{\mathrm{id}_X\}$ 就是恒等函子到 $U\circ F$ 的自然变换. 于是只需证明对每个 L-背景 (A,B,R) 和连续映射 $f:(X,c)\longrightarrow(A,R^{\downarrow}\circ R_{\uparrow})$, 存在唯一的信息态射

$$(h,g):F(X,c)\longrightarrow(A,B,R)$$

使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
(X,c) \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[dr, "f"'] & U\circ F(X,c) \arrow[d, "U(h,g)"] \\
 & U(A,B,R)
\end{tikzcd}$$

根据定义, $F(X,c)=(X,c(L^X),S)$, $U(h,g)=h$, 其中 $S(x,\mu)=\mu(x)$. 因此我们只需证明存在唯一的映射 $g:B\longrightarrow c(L^X)$ 使得

$$(f,g):(X,c(L^X),S)\longrightarrow(A,B,R)$$

是信息态射.

对每个 $b\in B$, 令 $g(b)=f^{\leftarrow}(R^{\downarrow}(I_b))$. 由 $R^{\downarrow}\circ R_{\uparrow}\circ R^{\downarrow}(I_b)=R^{\downarrow}(I_b)$ 可知 $R^{\downarrow}(I_b)$ 是 $(A,R^{\downarrow}\circ R_{\uparrow})$ 中的 L-闭子集, 因此由 $f:(X,c)\longrightarrow(A,R^{\downarrow}\circ R_{\uparrow})$ 的连续性得到 $f^{\leftarrow}(R^{\downarrow}(I_b))\in c(L^X)$. 这说明 $g:B\longrightarrow c(L^X)$ 是良定义的. 现在我们验证 $(f,g):(X,c(L^X),S)\longrightarrow(A,B,R)$ 是信息态射, 这只需注意到对任意 $x\in X$ 和 $b\in B$ 有

$$S(x,g(b))=g(b)(x)=R^{\downarrow}(I_b)(f(x))=R(f(x),b).$$

因此这样的 g 存在.

为证唯一性, 假设有映射 $g':B\longrightarrow c(L^X)$ 使得

$$(f,g'):(X,c(L^X),S)\longrightarrow(A,B,R)$$

是信息态射. 则对任意 $b\in B$ 和 $x\in X$,

$$g'(b)(x)=S(x,g'(b))=R(f(x),b)=R^{\downarrow}(I_b)(f(x))=g(b)(x),$$

因此 $g'=g$. □

根据引理 6.10 和定理 6.11, 我们立刻得到, 范畴 L-**Cls** 是 L-**Ctx** 的余反射子范畴 (coreflective subcategory).

§7 基于形式概念分析的概念格函子

L-背景 (X,Y,R) 的一个形式概念 (formal concept) (或者基于 FCA 的概念) 是指满足 $\lambda=R_{\uparrow}(\mu)$ 和 $\mu=R^{\downarrow}(\lambda)$ 的序对 $(\mu,\lambda)\in L^X\times L^Y$. μ 称作外延 (extent), λ 称作内涵 (intent). 我们用 $\mathfrak{B}(X,Y,R)$ 表示 (X,Y,R) 的所有形式概念组成的集合.

对 $(\mu_1,\lambda_1),(\mu_2,\lambda_2)\in\mathfrak{B}(X,Y,R)$, 令

$$\mathfrak{B}(X,Y,R)\big((\mu_1,\lambda_1),(\mu_2,\lambda_2)\big)=L^X(\mu_1,\mu_2)=(L_c^Y)^{\mathrm{op}}(\lambda_1,\lambda_2). \tag{7.1}$$

则 $\mathfrak{B}(X,Y,R)$ 成为 L-序集. 容易验证, 投射

$$\pi_1:\mathfrak{B}(X,Y,R)\longrightarrow L^X,\quad (\mu,\lambda)\mapsto\mu$$

是 L-保序嵌入. 由于 π_1 的像恰好是 L-闭包算子 $R^{\downarrow}\circ R_{\uparrow}:L^X\longrightarrow L^X$ 的不动点集, $\mathfrak{B}(X,Y,R)$ 与 L-完备格 L^X 中的 L-闭包系统 $R^{\downarrow}\circ R_{\uparrow}(L^X)$ 同构. 因此 $\mathfrak{B}(X,Y,R)$ 也是 L-完备格, 称作 (X,Y,R) 的形式概念格 (formal concept lattice).

类似地, 投射

$$\pi_2:\mathfrak{B}(X,Y,R)\longrightarrow (L_c^Y)^{\mathrm{op}},\quad (\mu,\lambda)\mapsto\lambda$$

也是 L-保序嵌入, 并且 π_2 的像恰好是 L-内部算子 $R_{\uparrow}\circ R^{\downarrow}:(L_c^Y)^{\mathrm{op}}\longrightarrow(L_c^Y)^{\mathrm{op}}$ 的不动点集. 因此 $\mathfrak{B}(X,Y,R)$ 也与 $R_{\uparrow}\circ R^{\downarrow}(L_c^Y)^{\mathrm{op}}$ 同构. 从等式 (7.1) 可以知道,

$$R_{\uparrow}:R^{\downarrow}\circ R_{\uparrow}(L^X)\longrightarrow R_{\uparrow}\circ R^{\downarrow}(L_c^Y)^{\mathrm{op}}$$

和

$$R^{\downarrow}:R_{\uparrow}\circ R^{\downarrow}(L_c^Y)^{\mathrm{op}}\longrightarrow R^{\downarrow}\circ R_{\uparrow}(L^X)$$

都是同构, 并且互为逆映射.

如果我们把 $\mathfrak{B}(X,Y,R)$ 与 $R^{\downarrow}\circ R_{\uparrow}(L^X)$ 视作等同, 则形式概念格 $\mathfrak{B}(X,Y,R)$ 就是 L-闭包空间 $(X,R^{\downarrow}\circ R_{\uparrow})$ 中的 L-闭子集组成的集合, 即 $\mathfrak{B}(X,Y,R)=T\circ U(X,Y,R)$. 由于 T 和 U 都是函子, 对应

$$(X,Y,R)\mapsto\mathfrak{B}(X,Y,R)$$

事实上定义了一个函子

$$\mathfrak{B} : L\text{-}\mathbf{Ctx} \longrightarrow L\text{-}\mathbf{Sup},$$

我们把它叫做形式概念格函子 (the formal concept lattice functor), 或者基于 FCA 的概念格函子. 注意到 $\mathfrak{B}$ 是右伴函子 U 和左伴函子 T 的复合.

$$\begin{tikzcd}
L\text{-}\mathbf{Ctx} \arrow[rr, "\mathfrak{B}"] \arrow[dr, shift right, "U"'] & & L\text{-}\mathbf{Sup} \arrow[dl, shift right, "D"'] \\
& L\text{-}\mathbf{Cls} \arrow[ul, shift right, "F"'] \arrow[ur, shift right, "T"'] &
\end{tikzcd}$$

形式概念格函子 $\mathfrak{B} : L\text{-}\mathbf{Ctx} \longrightarrow L\text{-}\mathbf{Sup}$ 把信息态射

$$(f, g) : (X, Y, R) \longrightarrow (A, B, S)$$

映到 L-完备格之间的左伴

$$f_* : R^{\downarrow} \circ R_{\uparrow}(L^X) \longrightarrow S^{\downarrow} \circ S_{\uparrow}(L^A).$$

定义7.1. 范畴 $\mathbf{C}$ 称作自对偶的 (self dual), 如果存在 $\mathbf{C}$ 上的反变函子 $(-)^{\perp}$ 使得 $(-)^{\perp} \circ (-)^{\perp} = \mathrm{id}$, 这里 id 是 $\mathbf{C}$ 上的恒等函子. 对每个态射 $f : A \longrightarrow B$, $f^{\perp} : B^{\perp} \longrightarrow A^{\perp}$ 称作 f 的对偶 (dual).

L-$\mathbf{Ctx}$ 是自对偶的. 信息态射 $(f, g) : (X, Y, R) \longrightarrow (A, B, S)$ 的对偶由 $(f, g)^{\perp} = (g, f) : (B, A, S^{\mathrm{op}}) \longrightarrow (Y, X, R^{\mathrm{op}})$ 给出.

当 $(L, *)$ 时交换的有单位元的 quantale, L-$\mathbf{Sup}$ 是自对偶的. 设 $f : A \longrightarrow B$ 是 L-完备格之间的左伴, $g : B \longrightarrow A$ 为 f 的右伴. f 的对偶 $f^{\perp}$ 由左伴 $g : B^{\mathrm{op}} \longrightarrow A^{\mathrm{op}}$ 给出.

下面的命题指出, 形式概念格函子 $\mathfrak{B} : L\text{-}\mathbf{Ctx} \longrightarrow L\text{-}\mathbf{Sup}$ 在自然同构的意义下保持 L-$\mathbf{Ctx}$ 和 L-$\mathbf{Sup}$ 的对偶结构.

命题7.2. 设 $(L, *)$ 是交换的有单位元的 *quantale*, 则下图在自然同构的意义下

交换.

$$\begin{tikzcd} L\text{-}\mathbf{Ctx} \arrow[r, "\mathfrak{B}"] \arrow[d, "(-)^{\perp}"'] & L\text{-}\mathbf{Sup} \arrow[d, "(-)^{\perp}"] \\ L\text{-}\mathbf{Ctx} \arrow[r, "\mathfrak{B}"'] & L\text{-}\mathbf{Sup} \end{tikzcd}$$

证明: 根据定义, 函子 $(-)^{\perp}\circ\mathfrak{B}$ 和 $\mathfrak{B}\circ(-)^{\perp}$ 把 L-背景 (X,Y,R) 分别映到 $\mathfrak{B}(X,Y,R)^{\perp}=\big(R^{\downarrow}\circ R_{\uparrow}(L^X)\big)^{\mathrm{op}}$ 和 $\mathfrak{B}(Y,X,R^{\mathrm{op}})=R_{\uparrow}\circ R^{\downarrow}(L^Y)$, 因此

$$\eta_{(X,Y,R)}=R_{\uparrow}:\mathfrak{B}(X,Y,R)^{\perp}\longrightarrow\mathfrak{B}(Y,X,R^{\mathrm{op}})$$

是 L-完备格之间的同构. 我们断言 $\eta=\{\eta_{(X,Y,R)}\}$ 是从 $(-)^{\perp}\circ\mathfrak{B}$ 到 $\mathfrak{B}\circ(-)^{\perp}$ 的自然同构. 事实上, 我们需要证明对任意信息态射 $(f,g):(X,Y,R)\longrightarrow(A,B,S)$, 下面的图交换:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{B}(A,B,S)^{\perp} \arrow[r, "S_{\uparrow}"] \arrow[d, "\mathfrak{B}(f,g)^{\perp}"'] & \mathfrak{B}(B,A,S^{\mathrm{op}}) \arrow[d, "\mathfrak{B}(g,f)"] \\ \mathfrak{B}(X,Y,R)^{\perp} \arrow[r, "R_{\uparrow}"'] & \mathfrak{B}(Y,X,R^{\mathrm{op}}) \end{tikzcd}$$

由于

$$\mathfrak{B}(f,g)^{\perp}=f^{*}:\big(S^{\downarrow}\circ S_{\uparrow}(L^A)\big)^{\mathrm{op}}\longrightarrow\big(R^{\downarrow}\circ R_{\uparrow}(L^X)\big)^{\mathrm{op}},$$

而

$$\mathfrak{B}(g,f)=g_{*}:S_{\uparrow}\circ S^{\downarrow}(L^B)\longrightarrow R_{\uparrow}\circ R^{\downarrow}(L^Y),$$

我们只需证明 $g_* \circ S_\uparrow = R_\uparrow \circ f^*$. 对任意 $\lambda \in S^\downarrow \circ S_\uparrow(L^A)$ 和 $y \in Y$,

$$\begin{aligned}
R^\downarrow \circ g_* \circ S_\uparrow(\lambda)(x) &= R^\downarrow \circ g^\to \circ S_\uparrow(\lambda)(x) \\
&= \bigwedge_{y\in Y} \Big(g^\to \circ S_\uparrow(\lambda)(y) \to R(x,y) \Big) \\
&= \bigwedge_{y\in Y} \bigwedge_{g(b)=y} \Big(S_\uparrow(\lambda)(y) \to R(x,y) \Big) \\
&= \bigwedge_{b\in B} \Big(S_\uparrow(\lambda)(y) \to R(x,g(b)) \Big) \\
&= \bigwedge_{b\in B} \Big(S_\uparrow(\lambda)(y) \to S(f(x),b) \Big) \\
&= S^\downarrow \circ S_\uparrow(\lambda)(f(x)) \\
&= \lambda(f(x)) \\
&= f^*(\lambda)(x),
\end{aligned}$$

因此 $R^\downarrow \circ g_* \circ S_\uparrow = f^*$, 从而 $g_* \circ S_\uparrow = R_\uparrow \circ f^*$. 命题得证. □

最后, 我们将把形式概念格基本定理 [5] 推广到非交换 quantale 值的情形.

命题7.3. 设 A 为 L-完备格. 则 A 与某个 L-背景 (X,Y,R) 的形式概念格 $\mathfrak{B}(X,Y,R)$ 同构当且仅当 A 与某个 L-幂集 L^X 的 L-闭包系统同构.

证明: 必要性由 $\mathfrak{B}(X,Y,R)$ 同构于 $R^\downarrow \circ R_\uparrow(L^X)$ 立得. 而由于 F 是 U 的右逆 (引理 6.10), 充分性是显然的. □

定理7.4. (交换的情形见 [4]) 每个 L-完备格 A 同构于某个 L-背景 (X,Y,R) 的形式概念格 $\mathfrak{B}(X,Y,R)$.

证明: 由于 $A \cong T \circ D(A)$ (命题 6.4), 根据命题 7.3 立得. □

§8 基于粗糙集理论的概念格函子

设 (X,Y,R) 为 L-背景, 定义 X 和 Y 的 L-幂集之间的一对算子 $(R_\exists, R^\forall)$ 如下

$$R_\exists : L^X \longrightarrow L^Y, \quad R_\exists(\mu)(y) = \bigvee_{x\in X} R(x,y) * \mu(x)$$

$$R^\forall : L^Y \longrightarrow L^X, \quad R^\forall(\lambda)(x) = \bigwedge_{y\in Y} (R(x,y) \to_r \lambda(y)).$$

容易验证对任意 $\mu \in L^X$ 和 $\lambda \in L^Y$,

$$L^Y(R_\exists(\mu), \lambda) = L^X(\mu, R^\forall(\lambda)),$$

因此 $R_\exists \vdash R^\forall : L^X \rightharpoonup L^Y$ 是 L-伴随. 故 $R^\forall \circ R_\exists$ 是 L^X 上的L-闭包算子, 而 $R_\exists \circ R^\forall$ 是 L^Y 上的L-内部算子.

L-背景 (X,Y,R) 的一个面向属性概念 (property oriented concept) (或者基于 RST 的概念) 是指满足 $\lambda = R_\exists(\mu)$ 和 $\mu = R^\forall(\lambda)$ 的序对 $(\mu,\lambda) \in L^X \times L^Y$. μ 表示对象 (objects), 而 λ 表示属性 (properties). (X,Y,R) 的所有面向属性概念的集合记作 $\mathfrak{P}(X,Y,R)$. 对 $(\mu_1,\lambda_1),(\mu_2,\lambda_2) \in \mathfrak{P}(X,Y,R)$, 令

$$\mathfrak{P}(X,Y,R)((\mu_1,\lambda_1),(\mu_2,\lambda_2)) = L^X(\mu_1,\mu_2) = L^Y(\lambda_1,\lambda_2), \tag{8.1}$$

则 $\mathfrak{P}(X,Y,R)$ 成为 L-序集. 容易验证, 投射

$$\pi_1 : \mathfrak{P}(X,Y,R) \longrightarrow L^X, \quad (\mu,\lambda) \mapsto \mu$$

是 L-保序嵌入. 由于 π_1 的像恰好是 L-闭包算子 $R^\forall \circ R_\exists : L^X \longrightarrow L^X$ 的不动点集, 我们得到 $\mathfrak{P}(X,Y,R)$ 与 L-完备格 L^X 中的 L-闭包系统 $R^\forall \circ R_\exists(L^X)$ 同构. 因此 $\mathfrak{P}(X,Y,R)$ 也是 L-完备格, 称作 (X,Y,R) 的面向属性概念格.

投射

$$\pi_2 : \mathfrak{P}(X,Y,R) \longrightarrow L^Y, \quad (\mu,\lambda) \mapsto \lambda$$

同样是 L-保序嵌入, 并且 π_2 的像恰好是 L-内部算子 $R_\exists \circ R^\forall : L^Y \longrightarrow L^Y$ 的不动点集. 因此 $\mathfrak{P}(X,Y,R)$ 也与 $R_\exists \circ R^\forall(L^Y)$ 同构. 从等式 (8.1) 可以知道,

$$R_\exists : R^\forall \circ R_\exists(L^X) \longrightarrow R_\exists \circ R^\forall(L^Y)$$

和

$$R^{\forall}: R_{\exists} \circ R^{\forall}(L^{Y}) \longrightarrow R^{\forall} \circ R_{\exists}(L^{X})$$

都是同构, 并且互为逆映射.

为看到面向属性概念格的函子性质, 我们给出下面的命题.

命题8.1. 设 $(f,g):(X,Y,R)\longrightarrow(A,B,S)$ 为 L-**Ctx** 为 L-背景之间的信息态射, 则 $f:(X,R^{\forall}\circ R_{\exists})\longrightarrow(A,S^{\forall}\circ S_{\exists})$ 连续.

证明: 考虑下图:

$$\begin{tikzcd}
L^X \arrow[r, "R_\exists"] \arrow[d, "f^{\rightarrow}"'] & L^Y \arrow[r, "R^\forall"] \arrow[d, "g^{\leftarrow}"] & L^X \arrow[d, "f^{\rightarrow}"] \\
L^A \arrow[r, "S_\exists"'] & L^B \arrow[r, "S^\forall"'] & L^A
\end{tikzcd}$$

我们需要证明 $f^{\rightarrow}\circ R^{\forall}\circ R_{\exists}(\mu)\leq S^{\forall}\circ S_{\exists}\circ f^{\rightarrow}(\mu)$ 对任意 $\mu\in L^{X}$ 成立. 该证明过程与命题 6.6 类似, 故此处略去. □

从命题 8.1 我们得到一个函子 $V: L$-**Ctx** $\longrightarrow L$-**Cls**, 它把每个信息态射

$$(f,g):(X,Y,R)\longrightarrow(A,B,S)$$

映到连续映射

$$f:(X,R^{\forall}\circ R_{\exists})\longrightarrow(A,S^{\forall}\circ S_{\exists}).$$

如果我们把 $\mathfrak{P}(X,Y,R)$ 与 $R^{\forall}\circ R_{\exists}(L^{X})$ 视作等同, 则 $\mathfrak{P}(X,Y,R)=T\circ V(X,Y,R)$. 因此 $\mathfrak{P}$ 是从 L-**Ctx** 到 L-**Sup** 的函子, 即 $V: L$-**Ctx** $\longrightarrow L$-**Cls** 和 $T: L$-**Cls** $\longrightarrow L$-**Sup** 的复合.

$$\begin{tikzcd}
L\text{-}\mathbf{Ctx} \arrow[rr, "\mathfrak{P}"] \arrow[dr, "V"'] & & L\text{-}\mathbf{Sup} \arrow[dl, shift right, "D"'] \\
& L\text{-}\mathbf{Cls} \arrow[ur, shift right, "T"'] &
\end{tikzcd}$$

我们把函子 $\mathfrak{P}: L$-**Ctx** $\longrightarrow L$-**Sup** 叫做面向属性概念格函子 (the property oriented concept lattice functor), 或者基于 RST 的概念格函子. $\mathfrak{P}$ 把每个信息

态射

$$(f,g):(X,Y,R)\longrightarrow(A,B,S)$$

映到 L-完备格之间的左伴

$$f_*:R^{\forall}\circ R_{\exists}(L^X)\longrightarrow S^{\forall}\circ S_{\exists}(L^A).$$

下面我们讨论两个概念格函子 $\mathfrak{B}$ 和 $\mathfrak{P}$ 的关系.

设 $d\in L$ 为对偶元, 定义映射 $\neg_l,\neg_r:L\longrightarrow L$ 如下:

$$\neg_l a=a\to_l d,\quad \neg_r a=a\to_r d.$$

对任意集合 X, $\neg_l$ 和 $\neg_r$ 的定义可以逐点地扩展到 L^X 上. 特别地, 对应 $(X,Y,R)\mapsto(X,Y,R\to_l d)$ 定义了一个在态射上恒等的函子 $\neg_l:L\text{-}\mathbf{Ctx}\longrightarrow L\text{-}\mathbf{Ctx}$. 类似地, 我们可以定义出函子 $\neg_r:L\text{-}\mathbf{Ctx}\longrightarrow L\text{-}\mathbf{Ctx}$.

容易验证, 如果 d 是对偶元, 则函子 $\neg_l:L\text{-}\mathbf{Ctx}\longrightarrow L\text{-}\mathbf{Ctx}$ 和 $\neg_r:L\text{-}\mathbf{Ctx}\longrightarrow L\text{-}\mathbf{Ctx}$ 互逆.

引理8.2. 设 d 为对偶元, 则对任意 L-背景 (X,Y,R)成立 $R_{\exists}=\neg_l\circ(\neg_r R)_{\uparrow}$ 以及 $R^{\forall}=(\neg_r R)^{\downarrow}\circ\neg_r$.

证明: 对任意 $\mu\in L^X$ 和 $\gamma\in c(L^X)$,

$$\begin{aligned}
R_{\exists}(\mu)(\gamma) &= \bigvee_{x\in X}\Big(\big((R(x,\gamma)\to_r 0)\to_l 0\big)*\mu(x)\Big)\\
&= \bigvee_{x\in X}\Big(\big(\mu(x)\to_r(R(x,\gamma)\to_r 0)\big)\to_l 0\Big)\\
&= \Big(\bigwedge_{x\in X}\big(\mu(x)\to_r(R(x,\gamma)\to_r 0)\big)\Big)\to_l 0\\
&= (R\to_r 0)_{\uparrow}(\mu)(\gamma)\to_l 0;
\end{aligned}$$

并且对任意 $\lambda:c(L^X)\longrightarrow L$ 和 $x\in X$,

$$\begin{aligned}
R^{\forall}(\lambda)(x) &= \bigwedge_{\gamma\in c(L^X)}\Big(\big((R(x,\gamma)\to_r 0)\to_l 0\big)\to_r\lambda(\gamma)\Big)\\
&= \bigwedge_{\gamma\in c(L^X)}\big((\lambda(\gamma)\to_r 0)\to_l(R(x,\gamma)\to_r 0)\big)\\
&= (R\to_r 0)^{\downarrow}(\lambda\to_r 0)(x).\quad\square
\end{aligned}$$

命题8.3. 若 L 有对偶元 d, 则 $V = U \circ \neg_r$, 并且 $G = \neg_l \circ F : L\text{-}\mathbf{Cls} \longrightarrow L\text{-}\mathbf{Ctx}$ 是它的左伴和右逆.

证明: 由于此时 $\neg_l$ 和 $\neg_r$ 互逆, 根据引理 6.10 和定理 6.11 立得. □

命题8.4. 若 L 有对偶元 d, 则 $\mathfrak{P} = \mathfrak{B} \circ \neg_r$ 且 $\mathfrak{B} = \mathfrak{P} \circ \neg_l$.

证明: 由引理 8.2 立得. □

由上面的命题和定理 7.4 可知, 如果 L 有对偶元, 则每个 L-完备格同构于某个 L-背景 (X, Y, R) 的面向属性概念格 $\mathfrak{P}(X, Y, R)$. 接下来我们将要证明, 这里 L 有对偶元的条件是必不可少的.

命题8.5. 设 A 为 L-完备格. 则 A 与某个 L-背景 (X, Y, R) 的面向属性概念格 $\mathfrak{P}(X, Y, R)$ 同构当且仅当 A 与某个 L-幂集 L^Y 的 L-内部系统同构.

证明: 必要性由命题 5.5 立得. 为证充分性, 设 A 为 L-内部算子 $o : L^Y \longrightarrow L^Y$ 的不动点集并继承 L^Y 上的 L-序. 设 X 为 A 中元素组成的集合, 定义 $R : X \times Y \longrightarrow L$ 为 $R(\phi, y) = \phi(y)$. 我们将证明 $o(\lambda) = \lambda \iff R_\exists \circ R^\forall(\lambda) = \lambda$, 从而得到 $o = R_\exists \circ R^\forall$:

设 $o(\lambda) = \lambda$, 则由 $R_\exists \circ R^\forall$ 是 L-内部算子可知 $R_\exists \circ R^\forall(\lambda) \leq \lambda$. 而对任意 $y \in Y$,

$$\begin{aligned} R_\exists \circ R^\forall(\lambda)(y) &= \bigvee_{\phi \in X} \Big(R(\phi, y) * \bigwedge_{z \in Y} \big(R(\phi, z) \to_r \lambda(z) \big) \Big) \\ &= \bigvee_{\phi \in X} \Big(\phi(y) * \bigwedge_{z \in Y} \big(\phi(z) \to_r \lambda(z) \big) \Big) \\ &\geq \lambda(y) * \bigwedge_{z \in Y} \big(\lambda(z) \to_r \lambda(z) \big) \\ &\geq \lambda(y), \end{aligned}$$

所以 $R_\exists \circ R^\forall(\lambda) = \lambda$.

反之, 设 $R_\exists \circ R^\forall(\lambda) = \lambda$. 由于 X 关于 L^Y 中的并和张量封闭, 故对任意 $\mu \in L^X$, $R_\exists(\mu) = \bigvee_{\phi \in X} (\phi * \mu(\phi))$ 在 X 中, 因此 $\lambda = R_\exists(R^\forall(\lambda))$ 必然在 X 中. □

命题8.6. 如果 $1 \in L$ 是单位元, 且每个 L-完备格与某个 L-幂集 L^X 的 L-内部系统同构, 则对任意 $a \in L$ 有 $a = (a \to_l 0) \to_r 0$.

证明: 注意到 L_c^{op} 是 L-完备格, 由题设及命题 5.5 可知存在集合 X 和 L-保序单射 $f : L_c^{\mathrm{op}} \longrightarrow L^X$ 使得 f 是左伴.

首先, 由于 $1 \in L$ 是 L_c^{op} 的最小元, 我们有 $f(1) = \underline{0}$, 这里 $\underline{0} \in L^X$ 表示恒等于 0 的常值映射.

其次, 由命题 4.15 和例 4.10 我们得到 $f(a \to_r b) = f(b) * a$ 对任意 $a, b \in L$ 成立, 从而

$$f(a) * a = f(a \to_r a) = \underline{0},$$

这意味着 $f(a) \leq a \to_l \underline{0}$ 对任意 $a \in L$ 成立. 因此,

$$\begin{aligned} f(((a \to_l 0) \to_r 0) \to_r a) &= f(a) * ((a \to_l 0) \to_r 0) \\ &\leq (a \to_l \underline{0}) * ((a \to_l 0) \to_r 0) \\ &\leq \underline{0}. \end{aligned}$$

于是 $f(((a \to_l 0) \to_r 0) \to_r a) = \underline{0} = f(1)$. 由于 f 是单射, 我们有 $((a \to_l 0) \to_r 0) \to_r a = 1$, 从而$(a \to_l 0) \to_r 0 \leq a$.

最后, 由于 $a \leq (a \to_l 0) \to_r 0$ 显然成立, 故 $a = (a \to_l 0) \to_r 0$. □

定理8.7. (交换的情形见 [16]) 设 $(L, *)$ 为 *quantale*, 其中 $1 \in L$ 是单位元, $0 \in L$ 是循环元, 则下列命题等价:

(1) 0 是对偶元, 从而 L 是 *Girard quantale*.

(2) 函子 $V : L\text{-}\mathbf{Ctx} \longrightarrow L\text{-}\mathbf{Cls}$ 有右逆, 即存在函子 $G : L\text{-}\mathbf{Cls} \longrightarrow L\text{-}\mathbf{Ctx}$ 使得 $V \circ G = \mathrm{id}_{L\text{-}\mathbf{Cls}}$.

(3) 每个 L-完备格同构于某个 L-背景 (X, Y, R) 的面向属性概念格 $\mathfrak{P}(X, Y, R)$.

(4) 每个 L-完备格同构于某个 L-幂集 L^X 的一个 L-内部系统.

证明: (1) ⇒ (2): 命题 8.3.

(2) ⇒ (3): 与定理 7.4 的推导类似.

(3) $\Rightarrow$ (4): 命题 8.5.

(4) $\Rightarrow$ (1): 命题 8.6. $\square$

注8.8. 定理 7.4 说明每个 L-完备格都同构于某个 L-背景的形式概念格; 但定理 8.7 告诉我们, 当 0 不是对偶元时, 存在这样的 L-完备格, 它不同构于任何 L-背景的面向属性概念格. 因此, 基于形式概念分析的概念格的表达能力比基于粗糙集理论的概念格更强.

参考文献

[1] M. Barr, $*$-Autonomous categories and linear logic, Mathematical Structures in Computer Science 1(1991) 159-178.

[2] R. Bělohlávek, Fuzzy Galois connections, Mathematical Logic Quarterly 45(1999) 497-504.

[3] R. Bělohlávek, Fuzzy closure operators, Journal of Mathematical Analysis and Applications 262(2001) 473-489.

[4] R. Bělohlávek, Concept lattices and order in fuzzy logic, Annals of Pure and Applied Logic 128(2004) 277-298.

[5] D. A. Davey, H. A. Priestley, Introduction to Lattices and Order, 2nd Edtion, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[6] K. Deiters, M. Erné, Sums, products and negations of contexts and complete lattices, Algebra Universalis 60(2009) 469-496.

[7] M. Erné, E. Klossowski, A. Melton, G. E. Strecker, A primer on Galois connections, Annals of the New York Academy of Sciences 704(1993) 103-125.

[8] B. Ganter, Relational Galois connections, Lecture Notes in Artificial Intelligence 4390(2007) 1-17.

[9] B. Ganter, R. Wille, Formal Concept Analysis, Mathematical Foundations, Springer, Berlin, 1999.

[10] G. Gediga, I. Düntsch, Modal-style operators in qualitative data analysis, Proceedings of the 2002 IEEE international Conference in Data Mining, 2002, pp. 155-162.

[11] G. Georgescu, A. Popescu, Concept lattices and similarity in non-commutative fuzzy logic, Fundamenta Informaticae 53(2002) 23-54.

[12] G. Georgescu, A. Popescu, Non-dual fuzzy connections, Archive for Mathematical Logic 43(2004) 1009-1039.

[13] J. Gutiérrez García, I. Mardones-Pérez, M.A. de Prada Vicente, D. Zhang, Fuzzy Galois connections categorically, Mathematical Logic Quarterly 56(2010) 131-147.

[14] R. Kent, Distributed conceptual structures, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 2561, Springer, Berlin, 2002, pp. 104-123.

[15] M. Krötzsch, P. Hitzler, G. Q. Zhang, Morphisms in Context, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 3596, Springer, Berlin, 2005, pp. 223-237.

[16] H. Lai, D. Zhang, Concept lattices of fuzzy contexts: Formal concept analysis vs. rough set theory, International Journal of Approximate Reasoning 50(2009) 695-707.

[17] F. W. Lawvere, Metric spaces, generalized logic, and closed categories, Rendiconti del Seminario Matématico e Fisico di Milano 43(1973) 135-166.

[18] S. Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, 2nd Edition, Springer-Verlag, New York, 1998.

[19] H. Mori, Functorial properties of formal concept analysis, Lecture Notes in Computer Science 4604(2007) 505-508.

[20] A. Popescu, A general approach to fuzzy concepts, Mathematical Logic Quarterly 50(2004) 265-280.

[21] A.M. Radzikowska, E.E. Kerre, A comparative study of fuzzy rough sets, Fuzzy Sets and Systems 126(2002) 137-155.

[22] K. I. Rosenthal, Quantales and Their Applications, Pitman Research Notes in Mathematics Series, Vol. 234, Longman, Essex, 1990.

[23] I. Stubbe, Categorical structures enriched in a quantaloid: categories, distributors and functors, Theory and Applications of Categories 14(2005) 1-45.

[24] I. Stubbe, Categorical structures enriched in a quantaloid: tensored and cotensored categories, Theory and Applications of Categories 16(2006) 283-306.

[25] W. Xia, Morphismen als formale Begriffe, Darstellung und Erzeugung. Verlag Shaker, 1993.

[26] Y. Y. Yao, Concept lattices in rough set theory, in: S. Dick, L. Kurgan, W. Pedrycz, M. Reformat (Eds.), Proceedings of 2004 Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society (NAFIPS 2004), pp. 796-801.

[27] Y. Y. Yao, A comparative study of formal concept analysis and rough set theory in data analysis, Lecture Notes in Computer Science 3066(2004) 59-68.

[28] G. Q. Zhang, Chu spaces, concept lattices, and domains, Electronic Notes in Theoretical Computer Science 83(2003) 1-17.

作者攻读硕士学位期间完成的论文目录

[1] Shen Lili and Zhang Dexue, Many-valued state property systems and closure spaces, 四川大学学报(自然科学版), 已录用.

[2] Shen Lili and Zhang Dexue, The concept lattice functors, submitted to International Journal of Approximate Reasoning.

声　　明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果. 据我所知, 除了文中特别加以标注和致谢的地方外, 论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果, 也不包含为获得四川大学或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料. 与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意.

本学位论文成果是本人在四川大学读书期间在导师指导下取得的, 论文成果归四川大学所有, 特此声明.

作者签名: ______________　　　　导师签名: ______________

日　　期: ______________　　　　日　　期: ______________

致　谢

首先我要特别感谢我的导师张德学教授. 在这三年的研究生阶段里, 张老师严谨的治学态度, 精益求精的工作作风使我受益匪浅. 同时, 张老师在学习和生活上都给了我极大的帮助, 在我遇到挫折时给予了难得的支持和鼓励, 本文也是在他的悉心指导下完成的.

另外, 衷心感谢寇辉教授, 张树果教授, 师兄赖洪亮, 柴英明, 李令强, 陈丕炜, 王辉, 师姐方成玲, 张巍, 以及一起学习的同学蒲强, 熊利平, 赵浩然等.

最后, 感谢这三年来所有关心, 支持和帮助我的老师, 同学和朋友, 是他们的帮助使我不断成长. 也要谢谢我的家人, 正是有了他们的支持, 我才得以安心完成学业.